

Allgemeine Anleitung

zur Berechnung

der

Leibrenten und Anwartschaften.

Von

Dr. *Joh. Heinr. Meyer,*

Königl. Dänischem Etatsrath, Committirten in der Rentekammer und Mitdirector der allgemeinen Wittwenkasse und Versorgungsanstalt zu Kopenhagen.

Erster Theil.

Kopenhagen,

bey Friedrich Brummer.

1823.

Vorrede.

Die von Tetens im Jahre 1785 herausgegebene *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften* hat vor den frühern Werken über diesen Gegenstand unstreitig wesentliche Vorzüge, da sie zuerst diesen Theil der Rechenkunst in einem weitern Umfange nach richtigen Grundsätzen behandelt und mit einer leicht faſslichen Bezeichnung der dahin gehörigen Gröſsen darstellt. Für den theoretischen sowohl als practischen Gebrauch wird dieses Werk indeſsen dadurch sehr unbequem, daſs überall die Hauptsätze, zum Theil ohne eigentliche Beweise, vorangeschickt, die Beweise und Erläuterungen aber in den jedem Kapitel angehängten Zusätzen angebracht sind, imgleichen daſs manche Sätze, die früher allgemein hätten aufgestellt werden sollen, erst späterhin gelegentlich als für einen besondern Fall geltend vorgetra-

gen werden. Wenn übrigens Tetens gleich von den Verbindungen dreier Personen und den dahin gehörigen Renten und Anwartschaften handelt, so vermiſst man bey ihm doch eine allgemeine Anleitung zur Berechnung der höhern Verbindungsrenten und Anwartschaften. Daſs sonst hin und wieder einzelne Unrichtigkeiten vorkommen, muſs man um so mehr entschuldigen, da Tetens manche Materien zuerst wissenschaftlich behandelte. Zum Theil sind freilich diese Unvollkommenheiten daraus entstanden, daſs Tetens den eigentlichen Text seines Werks für Jedermann verständlich einrichten wollte; es scheint mir aber unmöglich, diesen Theil der angewandten Mathematik gründlich vorzutragen, wenn man nicht einige Bekanntschaft mit der Algebra und den Anfangsgründen der Differential- und Integral-Rechnung vorausſetzen will.

Dies sind die Gründe, welche mich bewogen, anstatt eine zweite Ausgabe des Tetensſchen Werks mit Zusätzen und Anmerkungen zu veranstalten, ein neues Werk über Berechnung der Leibrenten und

Anwartschaften auszuarbeiten, welches ich hiemit den Lesern übergebe. Mit Dankbarkeit lege ich dabey das Bekenntnifs ab, dafs ich die Grundsätze gröfstentheils aus dem Werke des verewigten Tetens, der auch in der Direction der hiesigen Wittwenkasse und Versorgungsanstalt als mathematisches Mitglied mein Vorgänger war, zuerst entnommen habe. Dafs indefsen nicht nur die Anordnung und Darstellung der von Tetens behandelten Materien an Zweckmässigkeit und Klarheit, sondern auch die Wifsenschaft sonst an Umfang gewonnen habe, wird hoffentlich dem aufmerksamen Leser nicht entgehen. Als einzelne Beispiele führe ich hier nur die Entwickelung der Ausdrücke $\int \frac{n^m}{r^n}$ und $\int \frac{(a - n)^m}{r^n}$, im ersten Abschnitt, die Darstellung derer Leibrenten, Wittwen- und Todten-Kafsen, wo die jedesmaligen Zahlungen durch die Beiträge der derzeitigen Interefsenten aufgebracht werden, im zweiten und dritten Abschnitte, so wie die Aufstellung der allgemeinen Formeln für die Verbindungsdauer, das mittlere Ueberleben, die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens, die höhern

Verbindungsrenten, Ueberlebensrenten und Anwartschaften, sämtlich im vierten Abschnitte, an. Die allgemeinen Formeln für das längste Leben und die Rente des Längstlebenden sind bereits von Tetens angegeben; ich habe aber dafür, ebenfalls im vierten Abschnitt, einen rein arithmetischen Beweis geliefert. Den Geschäftsmann glaube ich auf die einzelnen practischen Bemerkungen, die über Sterblichkeit und Sterbensordnung, so wie über Leibrenten- Wittwen- und Sterbe-Kafsen hinzugefügt sind, aufmerksam machen zu dürfen.

Herrn Brune's *Berechnung der Lebensrenten und Anwartschaften*, *Lemgo* 1820 bekam ich erst zu Gesicht als mein Werk gröſstentheils vollendet war. Auch er war zu der Arbeit durch den Wunsch, eine leichtere und gedrängtere Darstellung dieser Materien zu liefern, bewogen worden. Sein Werk und das meinige weichen indeſsen in der Bestimmung beträchtlich von einander ab. Herr Brune hat hauptsächlich dasjenige, was unmittelbar die practische Rechnung betrifft, abgehandelt und zum Theil sehr umständlich erläutert,

eben daher hat er auch die höhern Verbindungsrenten nur kurz berührt und die Rechnungen nach der Hypothese des gleichmässigen Absterbens gänzlich übergangen. Ich habe mehr nach theoretischer Vollständigkeit gestrebt, eben daher die der Rechnung zum Grunde liegenden Vorstellungen erörtert, die Rechnungsaufgaben unter jeder wahrscheinlichen Modification betrachtet, zugleich die höhern Verbindungsrenten, Ueberlebensrenten und Anwartschaften allgemein abgehandelt, auch dabey die Rechnung nach der gedachten Hypothese vorgetragen, wozu ich die Gründe im zweiten Abschnitt §. 48, Anm. 1. noch näher angegeben habe. Aufser diesen Gründen führe ich hier noch an, dafs alle Berechnungen von Lebens- und Verbindungsdauern, Lebens- und Verbindungsrenten etc., wenn für jedes einzelne Jahr der vollständige Werth bestimmt werden soll, auf den nämlichen Sätzen beruhen, die den Berechnungen nach der Hypothese vom gleichmäfsigen Absterben zum Grunde liegen, indem hiebey der Abgang innerhalb eines jeden einzelnen Jahrs als gleichmäfsig an-

genommen werden muſs. Es scheint mir daher auch, daſs beide Werke, das Brunesche und das meinige, sehr wohl neben einander bestehen können, das eine für solche Geschäftsmänner, welche die Vorschriften für die gewöhnlichen Fälle sofort fertig vorzufinden wünschen, das andre für Mathematiker, welche die vollständige Theorie übersehen wollen, um Plane zu Versorgungs-Anstalten jeder Art prüfen und entwerfen zu können. Ueber einzelne Stellen des Bruneschen Buchs finden sich in den Noten des gegenwärtigen Werks Bemerkungen.

Auch Morgans neue Ausgabe der zuerst im Jahre 1797 herausgekommenen Doctrine of annuities and aſsurances ist unter dem Namen *the Principles and Doctrine of aſsurances, annuities on lives and contingent reversions* während meiner Arbeit im Jahre 1821 herausgekommen. Dies Werk, das vielleicht nicht vielen meiner Leser zu Gesicht kommen möchte, enthält zuerst eine kurze Anleitung zur Berechnung der Renten und Anwartschaften. Dann folgen, nicht in der natürlichsten

Ordnung, 53 einzelne Probleme mit den Auflösungen für Leser, die der Mathematik nicht kundig sind. Weiterhin kommen Noten, welche zum Theil die Beweise dieser Probleme, in einer nicht leicht verständlichen Bezeichnung, enthalten. Endlich sind dem Werke 21 Tabellen, fast alle nach der Northamptoner Sterblichkeitstafel berechnet, angehängt. Aber diese Wissenschaft, die zuerst den Engländern, namentlich den Arbeiten des Halley, de Moivre, Simpson und Price ihren Ursprung verdankt, scheint seitdem bey ihnen nur geringe Fortschritte gemacht zu haben. Wenigstens sind selbst einem Morgan, der bereits im Jahre 1779 zum erstenmal sein Werk herausgab, der naeh 40 Jahren die zweite Ausgabe bearbeitet hat, und ineinem langen Zeitraum Actuary of the society for equitable assurances gewesen ist, die Verbesserungen, welche Tetens eingeführt hat, gänzlich unbekannt geblieben. Einzelne Bemerkungen über Morgan habe ich an seinem Orte da angebracht, wo meine Behauptungen und die seinigen nicht zusammenstimmen.

Tabellen habe ich diesem Werke nicht hinzugefügt, da sie theils für meinen Zweck entbehrlich waren, theils, wenn sie berichtigt und vervollständigt werden sollten, mehr Zeit erforderten, als ich auf diese Arbeit zu verwenden hatte. Sollte ein Mann, der mehr Musse und ein schärferes Gesicht als ich hat, eine vollständigere Sammlung von Tabellen, zu dieser Materie gehörig, veranstalten wollen, so würde ich dazu gern nach meinen Kräften beförderlich seyn.

Uebrigens ist der zweite Theil, der den vierten und letzten Abschnitt enthält, völlig ausgearbeitet, zum Theil schon abgedruckt, und wird nächstens unfehlbar folgen.

In Ansehung der hin und wieder vorkommenden Druckfehler, die aller angewandten Mühe ungeachtet nicht zu vermeiden gewesen sind, hoffe ich bey dem billigen Leser Entschuldigung zu finden.

Kopenhagen, den 20sten Nov. 1822.

Meyer.

Uebersicht des Inhalts.

Einleitung.

Erklärungen, §. 1 — 8.

Erster Abschnitt.

Von unbedingten Zahlungen und Zeitrenten.

Erstes Kapitel.

Vom Anwachs des Kapitals durch seine Zinsen.

Zinsfuſs, §. 9.
Accumulirter und *discontirter Werth* des Kapitals, §. 10—11.
Vergleichung des Werths nach verschiedenen Zinsfüſsen, §. 12.
Zinsenbelauf, §. 13.
Den *Zinsfuſs* aus den übrigen Gröſsen zu finden, §. 14.
Die *Anzahl der Jahre* zu finden, §. 15.
Zinsen, die in *Terminen während des Jahrs* bezahlt werden, §. 16 — 18.
Mögliche Einbuſse bey Zinseszinsen §. 19.
Anwachs eines Kapitals durch Zinsen mit Agio, §. 20.

Zweites Kapitel.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

Grundkapital, §. 21.
Accumulirter und *discontirter Werth* der Rente, §. 22—23.
Aufgeschobene Rente, §. 24.
Die Rente zu finden, welche einem gegebenen Kapital gleich ist, §. 25 — 26.
Die *Zahl der Jahre* aus den übrigen Gröſsen zu finden, §. 27.
Den *Zinsfuſs* zu finden, §. 28.
Zinsfuſs bey *zusammengesetzten Anleihen*, §. 29 — 30.
Tilgungsfonds, §. 31.

Renten, die nach *bestimmten Jahrperioden* bezahlt werden, §. 32.
Renten, *in Terminen innerhalb des Jahrs* zahlbar, §. 33—34.

Drittes Kapitel.

Von veränderlichen Zeitrenten.

Renten nach *geometrischen* Reihen, §. 35 — 36.
Renten nach *arithmetischen* Reihen, §. 37 — 38.
Renten nach *Potenzen der natürlichen Zahlen steigend*, §. 39 — 40.
Renten nach Verhältnifs der Zeit *augenblicklich* steigend, §. 41 — 42.
Renten nach *Potenzen der natürlichen Zahlen abnehmend*, §. 43.
Renten, nach Verhältnifs der Zeit *augenblicklich* abnehmend, §. 44.

Zweiter Abschnitt.

Von Renten und Anwartschaften, die vom Leben einer einzigen Person abhangen.

Erstes Kapitel.

Von der Sterbensordnung und den Mortalitätstabellen.

Sterbensordnungen und *Mortalitätstabellen*, §. 45.
Abfassung der Mortalitätstabellen nach *Todtenlisten* und *Zählungslisten*, §. 46 — 47.
Anwendung der Mortalitätstabellen, §. 48.
Allgemeine Bemerkungen darüber, Anm.

Zweites Kapitel.

Von Berechnung der Lebensdauer und der Wahrscheinlichkeit des Lebens.

Zahlen der Lebenden, ihre Decremente und Differenzen, §. 49 — 53.
Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Alter zu erreichen, §. 54.
Alterergänzung, §. 55.
Wahrscheinliche Lebensdauer, 56 — 57.
Mittlere Lebensdauer, 58 — 59.
Correction der Lebensdauer, §. 60.
Lebensdauer *nach der Hypothese*, §. 61.
Methode zur *Berechnung der Lebensdauer*, §. 62.

Drittes Kapitel.

Von unveränderlichen Leibrenten.

Formeln zu Berechnung der Leibrenten, §. 63 — 65.
Leichte Methode zu Berechnung derselben, §. 66.
Correction der Leibrente in Ansehung der Anzahl der Personen, §. 67 — 68.
Leibrenten, zahlbar *in Terminen während des Jahrs*, §. 69—71.
Besondre Bestimmungen bey Zahlung der Leibrenten, §. 72—73.
Leibrenten *nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens*, §. 74 — 75.
Aus einer gegebenen Leibrente die Leibrente *für ein andres Alter* zu finden, §. 76 — 77.
Vergleichung der Leibrenten *nach verschiedenen Zinsfüſsen*, §. 78.

Viertes Kapitel.

Von veränderlichen Leibrenten.

Leibrenten nach einer *geometrischen Progreſsion*, §. 79—80.
Leibrenten, *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsend*, §. 81.
Methode zur Berechnung solcher Leibrenten, §. 82 — 83.
Correction dieser Rente, §. 84 — 85.
Solche Leibrenten, *in Terminen* zahlbar, §. 86 — 87.
Leibrente, die jährlich um $\frac{1}{n}$ steigt, §. 88.
Leibrenten, die *nach der Ordnung der natürlichen Zah abnehmen*, §. 89 — 92.

Fünftes Kapitel.

Von aufgeschobenen, aufhörenden und aufgesparten Leibrenten.

Erklärungen, §. 93.
Aufgeschobene unveränderliche Leibrenten, §. 94 — 95.
Aufgeschobene *wachsende* Leibrenten §. 96 — 98.
Aufgeschobene *abnehmende* Leibrenten, §. 99.
Aufhörende Leibrenten, §. 100 — 102.
Aufgesparte Leibrenten, §. 103 — 105.
Leibrenten, die *durch jedesmaliche Beiträge* aufgebracht werden, §. 106.
Allgemeine Bemerkungen über Leibrenten, Anm.

Sechstes Kapitel.

Von Anwartschaften, die vom Leben einer einzigen Person abhangen.

Anwartschaften, die *zu einer bestimmten Zeit* fällig sind, §. 107 — 108.
Anwartschaften, die *bey dem Tode* einer Person fällig sind, §. 109 — 112.
Aufgeschobene und *aufhörende* Anwartschaften, §. 113.
Sterbekafsen, *auf den Contributionsfufs* eingerichtet, §. 114 — 115.
Sterbekafsen, wo die Zahlungen *durch jedesmalige Beiträge* aufgebracht werden, §. 116 a.
Anwartschaft auf eine Leibrente, §. 116 b.
Werth eines *immerwährenden Lehngeldes*, §. 116 c.
Bemerkungen über *Todtenkafsen*, Anm.

Dritter Abschnitt.

Von Renten und Anwartschaften, die von zweier Personen Leben abhangen.

Erstes Kapitel.

Vom Zusammenleben, Ueberleben und längsten Leben unter zwey Personen.

Zahl der *Verbindungen*, die nach einer gewifsen Zeit *bestehen*, *getrennt* oder *ausgestorben* sind. §. 117 — 120.
Wahrscheinlichkeit des Bestehens, der Trennung, des Aussterbens, §. 121.
Mittlere Verbindungsdauer, §. 122 — 123.
Methode zur *Berechnung* derselben, §. 124.
Correction der Verbindungsdauer, §. 125 — 126.
Interpolationsmethode, §. 127.
Verbindungsdauer *nach der Hypothese*, §. 128.
Näherungsmethode zur Berechnung der Verbindungsdauer, §. 129.
Aus einer gegebenen Verbindungsdauer die Dauer *für zwey andre Leben* zu finden, §. 130.
Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens §. 131 — 133.
Dieselbe *nach der Hypothese*, §. 134.
Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens, *auf eine bestimmte Zahl von Jahren*, §. 135, 136.
Mittlere Dauer des Ueberlebens, §. 137 — 138.
Dieselbe *nach der Hypothese*, §. 139.
Längstes Leben, §. 140.

Zweites Kapitel.

Von Verbindungsrenten unter zwey Personen.

Erklärung, §. 141.
Formeln zur Berechnung der Verbindungsrenten, §. 142 — 144.
Bequeme *Methode zur Berechnung* derselben, §. 145.
Correction der Verbindungsrente, §. 146 — 148.
Verbindungsrente, *in Terminen während des Jahrs* zahlbar, §. 149, 150.
Verbindungsrente *nach der Hypothese*, §. 151 — 152.
Näherungsmethode zur Berechnung der Verbindungsrenten §. 153.
Aus der gegebenen Verbindungsrente die Rente *für zwey andre Leben* zu finden, 154 — 155.
Aufgeschobene und *aufhörende* Verbindungsrenten, §. 156 — 158.
Wachsende Verbindungsrenten, §. 159 — 160.
Dieselben *nach der Hypothese*, § 161 — 162.
Aufgeschobene und *aufhörende wachsende* Verbindungsrente, §. 163 — 164.

Drittes Kapitel.

Von Ueberlebensrenten unter zwey Personen.

Erklärung, §. 165.
Formel für die Ueberlebensrente §. 166.
Correction derselben, § 167.
Ueberlebensrente *in Terminen*, §. 168.
Ueberlebensrente *nach der Hypothese*, §. 169.
Aufgeschobene und *aufhörende* Ueberlebensrente, §. 170—173.
Bedingte Ueberlebensrente, §. 174.
Bezahlung der Ueberlebensrente auf den *Kapital-* und *Contributions-Fuſs*, §. 175.
Wittwenkaſsen, wo *die jedesmaligen Pensionen durch Beiträge* aufgebracht werden, §. 176.
Bemerkungen über Wittwenkaſsen, Anm.

Viertes Kapitel.

Von der Rente auf das längste Leben unter zweien.

Formel für dieselbe und *Correction*, §. 177 — 178.
Diese Rente, *in Terminen* zahlbar, §. 179
Aufgeschobene Rente des Längstlebenden, §. 180.
Rente auf das *längste Ueberleben*, §. 181
Antheil jeder Person an der Rente auf das längste Leben, § 182.

Fünftes Kapitel.

Von Anwartschaften, die von zweier Personen Leben abhangen.

Anwartschaften, die *zu einer bestimmten Zeit* zahlbar, sind, §. 183 — 186.
Anwartschaft, *bey Auflösung der Verbindung* zahlbar, §. 187.
Correction derselben, §. 188.
Anwartschaft, zahlbar bey dem Tode einer bestimmten Person, *wenn sie zuerst stirbt*, §. 189.
Imgleichen, *wenn sie zuletzt stirbt*, §. 190.
Anwartschaft, die *bey dem Abgange des Längstlebenden* zahlbar, §. 191.
Aufgeschobene und *aufhörende* Anwartschaft, §. 192.
Ankauf der Anwartschaften auf *Contributionsfufs*, §. 193.
Geschlofsene Sterbekafsen, wo die *Zahlungen durch Beiträge* aufgebracht werden, §. 194 — 195.
Todtenkafsen *für Ehepaare*, §. 196.

Einleitung.

§. 1.

Eine jede Zahlung, die einen Geldwerth hat, kann in so weit sie für sich betrachtet wird, eine *Kapitalzahlung* in weiterm Sinne des Worts, und die derselben entsprechende Einnahme eine Kapitaleinnahme genannt werden.

§. 2.

Eine Kapitaleinnahme wird in so weit eine *Anwartschaft* einer Person genant, als es von einer oder mehreren Bedingungen abhängt, ob die Person, für welche sie bestimmt ist, dieselbe erhalten werde. Insbesondere werden hier Anwartschaften genannt werden solche Kapitaleinnahmen, die von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhangen, wobey es dann den gegebenen Bedingungen nach ungewiss seyn kann, entweder ob die Zahlung überall geleistet werden soll, oder auch ob sie einer bestimmten Person zukommt.

Eine solche Auwartschaft einer Person, die von dem Tode einer andern Person abhängt, kann auch abgesehen von dem rechtlichen Ursprung derselben im Allgemeinen eine *Erbschaft*, die erstere Person der Erbnehmer und die zweite der Erblasser genannt werden.

§. 3.

Eine jede Einnahme, die einen Geldwerth hat, wird, in so weit sie als Ertrag eines fortwährenden Grundstocks angesehen wird, auch *Rente* genannt. Insbesondre wird hier unter Rente verstanden werden eine solche Einnahme von Geldwerth, die *wiederhohlt in bestimmten gleichen Zwischenräumen* fällig ist. Diejenige Person, welche die Rente bezieht, heisst überhaupt der Rentennehmer, diejenige, welche sie bezahlt, wenn eine solche vorhanden, kann der Rentengeber heissen.

Je nachdem die Termine, worin die Rente bezahlt wird, ganze, halbe oder Vierteljahre etc. sind, heisst die Rente eine *jährliche*, *halbjährliche*, *vierteljährliche etc.*

Ferner ist die Rente entweder *immerwährend* oder auf eine gewisse Zeit *beschränkt*. Letztere heisst im Allgemeinen eine *Zeitrente* (Annuität) wiewohl man auch zuweilen hierunter, das Wort in engerm Sinne genommen, nur eine *unbedingte* aufhörende Rente versteht.

Ist die Einnahme in den verschiedenen Terminen gleich, so heisst die Rente eine *unveränderliche*, im entgegengesetzten Falle aber eine *veränderliche*.

§. 4.

Eine *Leib-* oder *Lebensrente* ist eine Zeitrente, im weitern Sinne des Worts, die von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhängt, wobey wieder die Rente entweder allein von dem Leben der Person, welche dieselbe bezieht, oder auch von dem Leben oder Tode einer andern Person abhangen kann.

Eine Lebensrente wird, in so weit sie zum Besten einer Person von einer andern gestiftet ist, auch wohl eine *Pension* genannt, wo dann die erstere Person der Pensionist und die leztere der Versorger heisst.

§. 5.

Die Berechnung der Anwartschaften, in engerm Sinne, beruhet auf der Berechnung der unbedingten Kapitalzahlungen, so wie die Berechnung der Lebensrenten auf der Berechnung der unbedingten Renten beruhet. Auch wird es sich weiterhin ergeben, dass die unbedingten Kapitaleinnahmen und Renten als Anwartschaften und Leibrenten des Grades o angesehen werden können. Es wird daher hier im ersten Abschnitt von den unbedingten Zahlungen und Zeitrenten gehandelt werden.

§. 6.

Eine Rente, welche als Ertrag einer Geldsumme angesehen wird und nach einem gewissen Verhältnisse zu dem Kapital bestimmt ist, heisst *Zinse*; die

Geldsumme, in so fern sie als Grund der Zinsen betrachtet wird, heifst auch Kapital im engern Sinne des Worts; das Verhältnifs der in einem Termin zu zahlenden Zinse zu dem Kapital ist der *Zinsfufs*.

Die Zinsen können übrigens *jährliche*, *vierteljährliche*, *monatliche etc.*, entweder *immerwährend* oder *aufhörend*, *unveränderlich* oder *veränderlich* seyn.

Anm. Ein jeder Gegenstand, der zu gewissen Zeiten einen bestimmten Ertrag von Geldwerth giebt, kann im weitern Sinne als Kapital und der reine Ertrag desselben als *Rente* angesehen werden. *Zinse* ist nur diejenige Rente, die als reiner Ertrag des Geldkapitals betrachtet wird.

§. 7.

Wenn die Zinsen nur von dem ursprünglichen Kapital berechnet werden, so heifsen sie *einfache Zinsen*. Wird dagegen die Zinse eines jeden Termins zum Kapital gelegt und von dem auf diese Weise angewachsenen Kapital die Zinse im folgenden Termin berechnet, so nennt man die Zinsen *zusammengesetzte* oder auch *Zinseszinsen*.

Die Berechnung der einfachen Zinsen ist hier als bekannt vorausgesetzt.

§. 8.

Der *gegenwärtige* Werth einer Anwartschaft oder einer Rente ist diejenige Geldsumme, die mit ihren Zinsen und Zinseszinsen der Anwartschaft

oder der zu zahlenden Rente zu der Zeit, da sie fällig sind, gleich ist. Bey jeder Bestimmung des Werths der Anwartschaften oder Renten muſs also der Zinsfuſs, von dem die Gröſse der Zinse abhängt, gegeben seyn, indem ein anderer Zinsfuſs einen andern Werth gibt. Da übrigens bey der Ausmittelung des Werths der Anwachs des Kapitals durch seine Zinsen zum Maasstabe dient, so wird hievon zuerst gehandelt werden.

Erster Abschnitt.

Von
unbedingten Zahlungen und Zeitrenten.

Erstes Kapitel.

Vom
Anwachs des Kapitals durch seine Zinsen.

§. 9.

Wenn die Zinse, die von einem Kapital = 1 in dem als Einheit angenommenen Termin zu entrichten ist, mit u bezeichnet wird, so ist u zugleich der *Zinsfuss*. Für den Zinsfuss von 4 Procent ist u = 0,04, für den Zinsfuss von 5 Procent u = 0,05 etc.

Ferner ist dann 1 + u der Exponent für die Zunahme des Kapitals in einem Termin. Der Kürze wegen wird dieser Exponent der Zunahme oder

$1 + u$ in Zukunft mit r bezeichnet werden, und es ist also $u = r - 1$.

§. 10.

Wenn ein Zinsentragendes Kapital $= C$ und der jährliche Zinsfuſs $= r \div 1$ ist, so wird der Werth des Kapitals mit seinen Zinsen am Ende des ersten Jahrs $= C. (1 + u) = Cr$, am Ende des zweiten Jahrs $= Cr . r = Cr^2$, am Ende des dritten $= Cr^3$, so wie überhaupt am Ende des nten Jahrs $= Cr^n$.

Cr^n heiſst der in n Jahren *accumulirte Werth* des Kapitals. Diesen accumulirten Werth findet man also, wenn man das gegebene Kapital mit der nten Potenz von $1 + u = r$ multiplicirt.

Ex. Man sucht den Werth von 125 Rthlr. mit Zinseszinsen am Ende des 25sten Jahrs nach dem 4 Procentfuſs. Hier ist $r^n = 1{,}04^{25} = 2{,}665836$, und es wird also $Cr^n = 125 . 2{,}665836 = 333{,}228$.

§. 11.

Wenn umgekehrt ein Kapital, das am Ende des nten Jahrs zahlbar ist, $= K$ gesetzt wird, und der gegenwärtige Werth, d. h. das Kapital, welches in n Jahren mit seinem Zinsenanwachse $= K$ ist, C benannt wird, so muſs seyn $Cr^n = K$, folglich ist

$$C = \frac{K}{r^n}.$$

$\frac{K}{r^n}$ ist der auf n Jahre *discontirte Werth* von K.

Diesen findet man daher, wenn man das nach n Jahren fällige Kapital mit $(1+u)^n$ oder r^n dividirt.

Ex. Man sucht den nach dem 5 Procentfuſs discontirten Werth eines am Ende des 20sten Jahrs zahlbaren Kapitals von 300 Rthl. Hier ist $r^n = 1{,}05^{20} = 2{,}653298$, und es wird folglich der gesuchte discontirte Werth $= \frac{300}{2{,}653298} = 113{,}064$.

Anm. Fast in allen Handbüchern über die Zinsrechnung findet man Tabellen für r^n und $\frac{1}{r^n}$ nach den gewöhnlichen Zinsfüszen. In Tetens *Einleitung* etc. ist r^n für die Zinsfüsze zu 2, 3, 4 und 5 Procent, und $\frac{1}{r^n}$ für 3, 4, 5 und 6 Procent berechnet, beide bis auf 100 Jahre. Ist n auch gröszer als 100, so kann man doch den Werth von r^n nud $\frac{1}{r^n}$ mit Hülfe der Tabellen finden. Wenn nämlich $n = 100 + m$, so ist $r^{100+m} = r^{100} \cdot r^m$; man nimmt also aus der Tabelle r^{100} und multiplicirt dies mit den gleichfals aus der Tabelle genommenen Werthe von r^m. Wird $\frac{1}{r^{100+m}}$ gesucht, so hat man $\frac{1}{r^{100+m}} = \frac{1}{r^{100} \cdot r^m} = \frac{1}{r^{100}} \cdot \frac{1}{r^m}$, uud man multiplicirt den Werth von $\frac{1}{r^{100}}$ mit $\frac{1}{r^m}$. Will man die Logarithmen gebrauchen, so findet man sowohl

$r^{100} + m$ als $\frac{1}{r^{100} + m}$ noch auf einem kürzern Wege.

§. 12.

Wenn zwey Kapitale, jedes $= C$, zinsbar belegt sind, das eine nach dem Zinsfuſse r, das andre nach dem Zinsfuſse $\mathfrak{r}$, so ist nach n Jahren der accumulirte Werth des ersten $= Cr^n$, des letzteren aber $= C\mathfrak{r}^n$, und wenn $\mathfrak{r} = mr$, so ist $C\mathfrak{r}^n = Cm^n\ r^n$. Beider Kapitale accumulirte Werthe verhalten sich also am Ende des nten Jahrs wie $Cr^n : Cr^n . m^n = 1 : m^n$. Dies Verhältniſs ändert sich, so wie n sich ändert, und wenn $m > 1$, so wird der Werth des lezteren Kapitals gegen den Werth des ersten immer gröſser.

Anm. Dagegen ist es einleuchtend, dasz wenn verschiedene Kapitale nach demselben Zinsfusze belegt sind, die accumulirten oder discontirten Werthe jeder nämlichen Zeit sich verhalten wie die Kapitale selbst, indem $Cr^n : \mathfrak{C}r^n = C : \mathfrak{C}$, auch $\frac{C}{r^n} : \frac{\mathfrak{C}}{r^n} = C : \mathfrak{C}$.

§. 13.

Wenn das Kapital zinsbar belegt ist, so ist der *Werth der aufgelaufenen Zinsen* (interusurium) am Ende des nten Jahrs gleich dem accumulirten Werthe des Kapitals weniger dem ursprünglichen Wer-

the desselben, d. h. der Zinsenbelauf ist $= Cr^n - C = C\,(r^n - 1)$.

Dies ist der Zinsenbelauf, so wie er am Ende des nten Jahrs angewachsen seyn wird. Suchte man den gegenwärtigen Werth dieses Zinsenbelaufs, so müste man denselben auf n Jahre discontiren, oder mit $\frac{1}{r^n}$ multipliciren. Dieser gegenwärtige Werth des Zinsenbelaufs ist also $= \frac{C\,(r^n - 1)}{r^n} = C\,(1 - \frac{1}{r^n})$, oder auch, wenn K den in n Jahren accumulirten Werth des Kapitals bezeichnet, $= \frac{K}{r^n} \left\{1 - \frac{1}{rn}\right\} = K. \left\{\frac{1}{rn} - \frac{1}{r2n}\right\}$, d. h. man findet das discontirte Jnterusurium von n Jahren, wenn man von dem gegenwärtigen Werthe des Kapitals den auf n Jahren discontirten Werth desselben abzieht.

Ex. 1. r^n ist nach den 4 Procentfuſse für 28 Jahre $= 2{,}998703$, folglich $rn - 1 = 1{,}998703$, und das accumulirte Interusurium für 100 Rthl. wird nach dem nämlichen Zinsfuſse auf dieselbe Zeit $= 1{,}998703 \cdot 100 = 199{,}8703$.

Ex. 2. Für die nämliche Zeit und nach dem-

selben Zinsfuſse ist $\frac{1}{r^n} = 0{,}333477$, folglich $1 - \frac{1}{r^n} = 1 - 0{,}333477 = 0{,}666523$. Dies mit 100 multiplicirt giebt 66,6523, als den gegenwärtigen Werth der Zinsen von 100 Rthl. auf 28 Jahre zu 4 Procent.

§. 14.

Ist der gegenwärtige und accumulirte Werth eines Kapitals, imgleichen die Zahl der Jahre gegeben, und wird *der Zinsfuſs gesucht*, so hat man (C für den gegenwärtigen, K für den accumulirten Werth und n für die Anzahl der Jahre gesetzt) $K = Cr^n$, also $\frac{K}{C} = r^n$, und $\sqrt[n]{\frac{K}{C}} = r$.

Ex. Es sey $C = 100$, $K = 200$, $n = 15$, so wird $r = \sqrt[15]{\frac{K}{C}} = \sqrt[15]{2} = 1{,}04729$.

§. 15.

Sucht man aus den übrigen Gröſsen die *Anzahl der Jahre*, so ist wieder $K = Cr^n$ und $\frac{K}{C} = r^n$, also $n. \log. r = \log. \frac{K}{C} = \log. K. - \log. C$, und

$$n = \frac{\log. K - \log. C}{\log. r}$$

Ex. Wenn K = 300, C = 150 und r = 1,04 ist, so wird $n = \frac{\log. K - \log. C.}{\log. r} =$

$$\frac{2{,}4771213 - 2{,}1760913}{0{,}0170333} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0170333} = 17{,}673 \ldots$$

§. 16.

Bisher ist nur von jährlichen Zinsen geredet; sollen aber die Zinsen in *kürzern Terminen* während des Jahres bezahlt, jedoch für das ganze Jahr der nämliche Zinsfuſs beibehalten werden, so ist der Exponent der Zunahme für ein halbes Jahr $= r^{\frac{1}{2}}$, für ein Vierteljahr $= r^{\frac{1}{4}}$, und für den nten Theil des Jahres $= r^{\frac{1}{n}}$; auch ist die Zinse für ein halbes Jahr $= r^{\frac{1}{2}} - 1$, für ein Vierteljahr $= r^{\frac{1}{4}} - 1$, und für $\frac{1}{n}$ des Jahrs $= r^{\frac{1}{n}} - 1$. Da in diesem Falle die während des Jahrs bezahlten Zinsen mit ihren Zinseszinsen zusammengenommen wieder die jährliche Zinse $r - 1$ ausmachen, so müssen die halbjährlichen, vierteljährlichen und $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinsen, so wie sie eben angegeben sind, kleiner seyn, als der halbe, vierte oder nte Theil der jährlichen Zinsen, wenn diese für sich allein ohne Zinseszinsen wieder die jährliche Zinse ausmachen sollen, d. h. es muſs $r^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{r-1}{n}$ seyn.

Für r = 1,03 ist $r^{\frac{1}{2}}$ = 1,014889 und $r^{\frac{1}{4}}$ = 1,007417, für r = 1,04 ist $r^{\frac{1}{2}}$ = 1,019804 und $r^{\frac{1}{4}}$ = 1,009853, für r = 1,05 ist $r^{\frac{1}{2}}$ = 1,024695 und $r^{\frac{1}{4}}$ = 1,012272.

Anm. Wenn man also am Ende des Jahrs 4 Rthlr. Zinsen zu empfangen hat, so kann man nach dem nämlichen Zinsfusze am Ende des halben Jahrs nicht 2 Rthlr., sondern nur 1,9804 Rthlr. verlangen. Eben so hat man für das Vierteljahr am Ende desselben nicht 1 Rthlr. sondern nur 0,9853 Rthlr. zu fordern. Wenn man aber diese Zinsen sofort nach dem Empfange wieder zu dem nämlichen Zinsfusze benutzt, so hat man am Ende des Jahrs an Zinsen und Zinseszinsen zusammen 4 Rthlr.

§. 17.

Bey manchen Geldgeschäften ist es indessen gebräuchlich, die Zinsen für ein halbes Jahr gleich der Hälfte der jährlichen Zinsen, für ein Vierteljahr gleich dem vierten Theile der Jahrzinse, so wie überhaupt, wenn r der Exponent der Zunahme ist, die Zinsen für $\frac{1}{n}$ des Jahrs $= \frac{r-1}{n} = \frac{u}{n}$ zu setzen, und es fragt sich daher, wie viel in diesem Fall eigentlich an Zinsen bezahlt wird.

Bey halbjährlichen Zahlungen wird in der Mitte des Jahrs $\frac{u}{2}$ und eben so viel am Ende des Jahrs

bezahlt; dazu kommen aber am Ende des Jahrs noch die halbjährlichen Zinsen für die in der Mitte des Jahrs bezahlte Hälfte mit $\frac{u}{2} \cdot \frac{u}{2} = \frac{u^2}{4}$. Folglich wird die gesamte Zinse $= u + \frac{u^2}{4}$. Für $r = 1{,}04$ wird dies $= 4{,}04$ Procent, für den Zinsfuſs von 5 Procent aber $= 5{,}0625$.

Bey vierteljährlicher Zahlung sind, auſser den in den vier Quartalen zu erlegenden vier Viertheilen der Zinsen, am Ende des Jahrs zu rechnen, drey vierteljährliche Zinsen für ein Viertheil, halbjährliche Zinsen für das zweyte und vierteljährliche Zinsen für das dritte Viertheil. Die Zahlung wird also $= u + \frac{3u}{4} \cdot \frac{u}{4} + \frac{2u}{4} \cdot \frac{u}{4} + \frac{u}{4} \cdot \frac{u}{4} = u + \frac{3u^2}{8}$. Dies giebt für $r = 1{,}04$ die gesammte jährliche Zinse zu $4{,}06$, für $r = 1{,}05$ zu $5{,}09375$ Procent.

Ueberhaupt wird hienach bey $\frac{1}{n}$ jährlichen Zahlungen an Zinsen und Zinseszinsen entrichtet $u + \frac{u}{n}\left\{\frac{n-1}{n} u + \frac{n-2}{n} u + \ldots + \frac{1}{n} u\right\} = u + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{2n^2} u^2 = u + \frac{n-1}{2n} u^2$. Setzt man nun, daſs die Zinsen jeden Augenblick bezahlt werden, wo also $n = \infty$ wird, so ist $u + \frac{n-1}{2n}$

$u^2 = u + \frac{u^2}{2} = \frac{(r+1)(r-1)}{2}$. Für $r =$ 1,04 beträgt dies 4,08 Procent, für $r =$ 1,05 aber 5,125 Procent. Dies ist also das Aeusserste, wozu die jährlichen Zinsen steigen können, wenn die Zwischenzinsen der Zeit proportional berechnet werden, wie klein die Termine auch seyn mögen.

§. 18.

Ausser diesen beiden, in den §. §. 16 und 17 angegebenen, in sich consequenten Methoden, giebt es noch zwey gemischte zur Berechnung der Zinsen und Zwischenzinsen für die Theile des Jahrs.

Man kann nämlich 1) die Zinsen des Kapitals für $\frac{1}{n}$ des Jahrs, wie in § 16 geschehen, $= r^{\frac{1}{n}} - 1$, die am Ende des Jahrs zu entrichtenden Zinsen dieser Zinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber $= \frac{m}{n}. r - 1$ setzen. Daraus erhält man für das ganze Jahr an Zinsen $n\ (r^{\frac{1}{n}} - 1)$ und an Zwischenzinsen

$$(r^{\frac{1}{n}} - 1)\left\{\frac{n-1}{n}\overline{r-1} + \frac{n-2}{n}\overline{r-1} + .. + \frac{1}{n}\overline{r-1}\right\}$$

$$= \frac{n.\overline{n-1}}{2n}\ (r-1)\ (r^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{n-1}{2n}$$

$(r-1)\ (r^{\frac{1}{n}} - 1)$. Beides zusammen gibt die gesammte Zinse $= n\ (r^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{\overline{n-1}.\overline{r-1}}{2n}\ (r^{\frac{1}{n}}$

$$- 1) = \left(n + \frac{\overline{n - 1} \cdot \overline{r - 1}}{2\,n}\right) . \left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Für $r = 1{,}04$ und bey halbjährlichen Zahlungen wird dies $= 0{,}04000408$, bey vierteljährlichen Zahlungen $= 0{,}04000480$. Für $r = 1{,}05$ und bey halbjährlichen Zahlungen ist obiger Ausdruck $= 0{,}05000737$, bey vierteljährlichen Zahlungen aber $= 0{,}05000840$.

Wenn aber $n = \infty$ gesetzt wird, so hat man
$\left\{n + \frac{\overline{n - 1} \cdot \overline{r - 1}}{2\,n}\right\} \left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \left(1 + \frac{r - 1}{2}\right)$
$n\left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \left(1 + \frac{r - 1}{2}\right)$ log. nat. r. $= \frac{r + 1}{2}$
log. nat. r. Für $r = 1{,}04$ ist log. nat. $r = 0{,}039220713$;
$\frac{r + 1}{2} = 1{,}02$ und $1{,}02 . 0{,}039220713 = 0{,}040005127$;
folglich wird hienach die Zinse für $100 = 4{,}0005127$, wenig gröſser als 4. Für $r = 1{,}05$ erhält man $\frac{r + 1}{2}$ log. nat. $r = 1{,}025 . 0{,}048790164 = 0{,}050009918$.

Man kann 2) die Zinsen für $\frac{1}{n}$ des Jahrs, wie in §. 17, $= \frac{r - 1}{n}$ setzen, die Zwischenzinsen der Termine aber nach dem §. 16 berechnen, wo also jeder nte Theil, der $\frac{m}{n}$ Theile vor Ablauf des Jahrs fällig ist, mit $\frac{m}{rn}$ multiplicirt werden muſs. Hier-

nach erhält man die Zinsen und Zinseszinsen =

$$\frac{r-1}{n}\left\{r^{\frac{n-1}{n}} + r^{\frac{n-2}{n}} + \dots + r^{\frac{n-n}{n}}\right\} =$$

$$\frac{r-1}{n} \cdot \frac{r^{\frac{n}{n}}-1}{r^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{(r-1)^2}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

Dieser Ausdruck wird für r = 1,05 und bey halbjährlichen Zahlungen = 0,040395, bey vierteljährlichen Zahlungen = 0,040597, für r = 1,05 aber bey halbjährlicher Zahlung = 0,050617, und bey vierteljährlicher Zahlung = 0,050928.

Setzt man aber n = ∞, so wird

$\frac{(r-1)^2}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)} = \frac{(r-1)^2}{\text{log. nat. } r}$. Wird r = 1,04 genommen, so ist $\frac{(r-1)^2}{\text{log. nat. } r} = \frac{0{,}0016}{0{,}039220713} = 0{,}04079488$.

Für r = 1,05 wird $\frac{(r-1)^2}{\text{log. nat. } r} = \frac{0{,}0025}{0{,}048790164} =$ 0,0512398.

Außerdem könnte man noch $\frac{r-1}{n} = \frac{u}{n}$ als Zinse für $\frac{1}{n}$ des Jahrs, $1 + \frac{u}{n}$ als den Exponenten des Zuwachses für diesen Zeittheil, und $\left\{1 + \frac{u}{n}\right\}^n$ als den Exponenten für das ganze Jahr ansehen. Hier wird nun $\left\{1 + \frac{u}{n}\right\}^n = 1 + n.\frac{u}{n} +$ $\frac{n.n-1}{1.\ 2}\frac{u^2}{n^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\frac{u^3}{n^3} + \dots$, und wenn n

$= \infty$ gesetzt wird, $= 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + ..$ Dies ist aber die Zahl, die zu dem Logarithmen $= u$ im natürlichen System gehört, und wenn e die Grundzahl dieser Logarithmen bezeichnet, so ist $1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + .. = e^u$. Folglich wird in diesem Falle der Exponent der jährlichen Zunahme $= e^u = e^{r-1}$, und die jährliche Zinse $= e^{r-1} - 1$.

Wird $r = 1{,}04$ genommen, so ist $e^{r-1} = 1{,}040810767$, also die Zinse für 1 Rthlr. oder $e^{r-1} - 1 = 0{,}0408107$. Für $r = 1{,}03$ wird $e^{r-1} = 1{,}05129329$, und $e^{r-1} - 1 = 0{,}05129329$.

Anm. Wie die Zinsen in jedem Falle berechnet werden sollen, hängt von den herkömmlichen oder verabredeten Bestimmungen ab. Nur bemerke ich noch, daſs die im §. 16 und 17 angegebenen beiden Methoden in sich consequent sind, erstere wenn die Zinsen mit Zinseszinsen am Ende des Jahrs wieder dem Fundamental-Zinsfuſse entsprechen, letztere wenn beide der Zeit proportional seyn sollen.

Die im §. 18 angeführten beiden ersten Methoden sind aus geometrischen und arithmetischen Verhältnissen zusammengesetzt. Die erstere derselben würde anwendbar seyn, wenn die Zinsen in Terminen nach dem Fundamentalzinsfuſse bezahlt werden sollten, aber innerhalb des Jahrs nach dem einfachen

Zinsfuſse benutzt werden könnten. Die zweite Methode kann man gebrauchen, wenn die terminlichen Zinsen zwar der Zeit proportional seyn, der Fundamentalzinsfuſs aber sonst beibehalten werden soll, wo dann das Kapital hiernach bestimmt werden muſs. Wer z. Beisp. $\frac{403,95}{4} = 100,9875$, d. h. beinahe 101, Rthlr. ausleiht, der kann völlig nach dem Zinsfuſse von 4 Procent halbjährlich 2 Rthlr. Zinse fordern, so wie der, welcher $\frac{405,97}{4} = 101,49$, oder beinahe 101½, Rthlr. ausleiht, nach demselben Zinsfuſse vierteljährlich einen Rthlr. Zinse zu fordern hat.

Bey der zuletzt im §. 18 angebenen Methode wird eigentlich durch Erhebung von $1 + \frac{r-1}{n}$ auf die Potenz des Grades n ein neuer Zinsfuſs constituirt.

Anm. 2. Daſs übrigens $n\,(r^{\frac{1}{n}} - 1)$, wenn n unendlich groſs wird, $=$ log. nat. r sey, wovon späterhin oft Gebrauch gemacht wird, muſs hier, als aus der Lehre von den Logarithmen bekannt, vorausgesetzt werden.

§. 19.

Gegen die Zulässigkeit der zusammengesetzten Zinsen wird, auſser den juridischen Gründen, die hier nicht in Betracht kommen, eingewandt, daſs die Zinsen nicht immer sofort wieder nutzbar ge-

macht werden können. Wo viele und beträchtliche Geldgeschäfte vorfallen, kann dieser Fall nicht leicht eintreten. Fände er indessen irgendwo Statt, so könnte dies doch nur bey den in jedem Termin erhobenen Zinsen und Zinseszinsen während eines Theils des nächstfolgenden oder höchstens während des ganzen nächstfolgenden Jahrs geschehen. Will man nun das Letztere annehmen, so fragt sich, wie viel dafür von dem accumulirten Werthe des Kapitals, so wie er vorhin angegeben worden, abgezogen werden müsse. Wenn $r = 1 + u$ gesetzt wird, so ist der accumulirte Werth des Kapitals am Ende des

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Jahrs } 0 = 1 & \\ \phantom{\text{Jahrs }} 1 = 1 + u & \\ \phantom{\text{Jahrs }} 2 = 1 + 2u + u^2 & \\ \phantom{\text{Jahrs }} 3 = 1 + 3u + 3u^2 + u^3 & \\ \phantom{\text{Jahrs }} 4 = 1 + 4u + 6u^2 + 4u^3 + u^4 & \\ \phantom{\text{Jahrs }} 5 = 1 + 5u + 10u^2 + 10u^3 + & \\ \qquad\qquad 5u^4 + u^5 & \end{array}\right\} = A$$

$$m, = 1 + m\,u + \frac{m.\overline{m-1}}{1.\;2}u^2 + \frac{m.\overline{m-1}\,\overline{m-2}}{1.\;2.\;3}u^3$$

$+$ . . etc., da der Werth am Ende des mten Jahrs $= (1 + u)^m$ ist.

Was am Ende des mten Jahrs hinzukömmt, findet man, wenn man den Werth des $m - 1$ten Jahrs von dem Werth des mten abzieht. Hiernach ist also der Zuwachs am Ende des

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Jahrs } 1 & = u \\ 2 & = u + u^2 \\ 3 & = u + 2u^2 + u^3 \\ 4 & = u + 3u^2 + 3u^3 + u^4 \\ 5 & = u + 4u^2 + 6u^3 + 4u^4 + u^5 \end{array}\right\} = B$$

Nimmt man nun an, daſs die Zinsen für den am Ende des $m - 1$ten Jahrs entstandenen Zuwachs im $m$ten Jahrs ganz wegfallen, so beträgt dieser Verlust für das

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Jahr } 1, & 0 \\ 2, & u^2 \\ 3, & u^2 + u^3 \\ 4, & u^2 + 2u^3 + u^4 \\ 5, & u^2 + 3u^3 + 3u^4 + u^5 \end{array}\right\} = C$$

Aus der Natur der aus figurirten Zahlen bestehenden Coefficienten ſämtlicher Potenzen von u ergiebt sich, daſs, da die Coefficienten der Reihen in B und C durch Subtraction zweier auf einander folgenden Reihen in A entstanden sind, die Coefficienten in B und C wieder figurirte Zahlen sind, und daſs die Coefficienten bey dem $m$ten Jahr in B den Coefficienten bey dem $m - 1$ten Jahrs in A, folglich die Coefficienten bey dem $m$ten Jahr in C den Coefficienten bey den $m - 2$ten Jahrs in A gleich, also wieder Binomialcoefficienten sind. Da nun überdies die Exponenten der Reihe für das $m$te Jahr in C um die Zahl 2 gröſser sind als die Exponenten der gleichvielten Theile derReihe des $m - 2$ten Jahrs in A, so erhellet, daſs die Reihe bey

jedem mten Jahr in C sey $= u^2 (1 + u)^{m-2}$, und es beträgt daher der vorhin erwähnte Zinsenverlust bey dem

Jahre 1, 0
2, $u^2 (1 + u)^0$
3, $u^2 (1 + u)^1$
4, $u^2 (1 + u)^2$
5, $u^2 (1 + u)^3$ etc.
m, $u^2 (1 + u)^{m-2}$.

Soll also der gesammte Zinsenverlust am Ende des nten Jahrs gefunden werden, so müssen diese Theile aus den verschiedenen Jahren und ihre Zinsen bis zum Schlusse des nten Jahrs zusammen genommen werden, und zwar so, daſs der Verlust jedes mten Jahrs mit r^{n-m} multiplicirt werde. Folglich erhält man den gesammten Verlust oder V $=$ $u^2 (1 + u)^0 r^{n-2} + u^2 (1 + u)^1 r^{n-3} + u^2 (1 + u)^2 r^{n-4} + \ldots + u^2 (1 + u)^{n-2} . r^{n-n}$. Nun ist, wie oben angenommen, $r = 1 + u$, folglich $(1 + u)^0 r^{n-2} = r^{n-2}$, $(1 + u)^1 r^{n-3} = r^{n-2}$, $(1 + u)^2 . r^{n-4} = r^{n-2}$ etc., $(1 + u)^{n-2} . r^0 = r^{n-2}$. Es wird also jedes Glied $= u^2 . r^{n-2}$, und da die Anzahl der Glieder $= n - 1$ ist, so ist der gesammte Verlust oder $V = (n - 1) r^{n-2} . u^2$ oder auch $V = (n - 1) (r^n - 2 r^{n-1} + r^{n-2})$.

Ex. Für $r = 1{,}04$ und $n = 50$ ist $(n - 1)$

$r^{n-2} u^2 = 49 \cdot 6{,}5705 \cdot \frac{16}{10000} = 0{,}515137$. Wenn man nun von $r^{50} =$ 7,106689
abzieht $V =$ 0,515137

so beträgt der Rest oder das Kapital mit den übrigen Zinsen 6,591546

Würde in jedem mten Jahre nur ein aliquoter Theil der Zinsen des Zuwachses vom Jahre $m - 1$ verlohren, so müſste man einen eben solchen aliquoten Theil von V nehmen, um den gesammten Verlust am Ende des nten Jahrs zu finden.

Anm. 1. Eben dasselbe Resultat ergiebt sich auch auf folgende Weise. Auf das Kapital 1 entsteht am Ende des 1sten Jahrs kein Verlust an Zinsen, am Ende des 2ten aber ist der Verlust nach obigen Voraussetzungen $= u^2$, welches am Ende des nten Jahrs, vom Anfange an gerechnet, mit Zinsen beträgt $u^2 \, r^{n-2}$. Im Anfange des 2ten Jahrs ist nun das Kapital angewachsen zu $1 + u$, und folglich ist auf die nämliche Weise wie vorhin der Verlust am Ende des 3ten Jahrs $= (1 + u) u^2$, welches mit Zinsen am Ende des nten Jahrs von Anfang an beträgt $(1 + u) u^2 . r^{n-3} = u^2 . r^{n-2}$. Eben so findet sich der Verlust für jedes Jahr, auf das Ende des nten Jahrs vom Anfange an berechnet, $= u^2 \, r^{n-2}$, folglich für alle $n - 1$ Jahre $= (n-1) \, u^2 \, r^{n-2}$.

Anm. 2. Herr Cotta hat in seiner Anweisung zur Waldwerth-Berechnung (Dresden, 1819) die sogenannten *mittlern Zinsen* einzuführen versucht, nämlich die einfachen Zinsen nebst dem halben Unterschiede der einfachen und zusammengesetzten, so daſs das Kapital 1 in n Jahren wird $= 1 + n (r - 1) + \frac{r^n - 1 - n (r - 1)}{2} = \frac{1 + r^n + n . \overline{r - 1}}{2}$, wonach z. B. ein

Kapital 1 zu 4 Procent in 50 Jahren anwachsen würde zu 5,05334. Es ergiebt sich aber ohne weitere Erörterung, dafs diese Annahme keinen hinlänglichen Grund habe.

§. 20.

Wenn ein Kapital solchergestalt angelegt wird, dafs Papiere, die im Preise gegen Münze wie 1 : m stehen und die Zinse u in Münze tragen, sowohl für das Kapital als für die jedesmaligen Zinsen und Zinseszinsen gekauft werden sollen, so ist die Frage, wie dies Kapital in Papier am Ende des nten Jahrs angewachsen seyn werde.

Das Kapital $= 1$ werde sofort im Anfange des 1sten Jahrs in Papier umgesetzt, worin man den Werth $= m$ erhält. Am Ende des 1sten Jahrs hat man nun, aufser dem Werthe m, nach dem Zinsfufs die Zinse im Münze $= u\,m$, die in Papier umm beträgt, folglich den gesammten Werth $= m\,(1 + um)$. Beim Ende des 2ten Jahrs kömmt zu dem Obligationsstock von $m\,(1 + u\,m)$ wieder dessen Zinse in Papier mit $m\,(1 + u\,m)\,u\,m$, also ist der gasammte Stock $= m\,(1 + u\,m)\,(1 + u\,m) = m\,(1 + u\,m)^2$. Da nun für jedes folgende Jahr der Stock mit $1 + u\,m$ multiplicirt werden mufs, so wird der gesammte Werth am Ende des nten Jahrs $= m\,(1 + u\,m)^n$. Dies wäre also der accumulirte Werth eines durch ein Kapital errichteten *Tilgungsstocks* unter den angegebenen Voraussetzungen. Begreiflich würde eine solche Berechnung nur

zulässig seyn, in sofern der Stand der Papiere gegen Münze als unveränderlich anzusehen wäre.

Anm. Würde der Tilgungsstock durch eine jährliche Rente errichtet, so wäre dessen Werth nach den weiterhin vorkommenden Sätzen zu suchen.

Zweites Kapitel.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

---

§. 21.

Ein Kapital, das nach dem zum Grunde liegenden Zinsfuſs in dem als Einheit angenommenen Termin die Zinse 1 trägt, soll in Zukunft das *Grundkapital* genannt und mit p bezeichnet werden. Wenn nun u oder r — 1 wieder die Zinse von dem Kapital 1 ist, so ist $p = \frac{1}{u} = \frac{1}{r-1}$ und $r - 1 = \frac{1}{p}$, auch $r = 1 + \frac{1}{p}$ und $p + 1 = pr$. Für den Zinsfuſs von 3 Procent ist also $p = 33\frac{1}{3}$, von 4 Procent = 25 und für 5 Procent = 20.

Wenn übrigens eine Rente = 1 immerwährend am Ende des Jahrs (oder des sonst bestimmten Termins) bezahlt wird, und der Zinsfuſs gegeben ist, so ist der gegenwärtige Werth der immerwähren-

den Rente gleich dem Grundkapital nach dem gegebenen Zinsfuſs.

Anm. Es ist einleuchtend, daſs wenn von dem Werthe einer Rente die Rede ist, der Zinsfuſs gegeben seyn müsse, und daſs bey einem andern Zinsfuſse sich auch der Werth der Rente ändere, eben so einleuchtend, als daſs ein und dasselbe Kapital in einem Falle 4 und in einem andern 5 Procent etc. tragen könne.

§. 22.

Soll eine Rente $= 1$ während n Jahre jedesmal am Ende des Jahrs bezahlt werden, und wird der *accumulirte Werth* dieser Rente am Ende des nten Jahrs gesucht, so muſs der Rententhaler jedes Jahrs nach seinem accumulirten Werthe auf das Ende des nten Jahrs berechnet, und die Summe dieser accumulirten Werthe zusammengelegt werden. Da nun der Rententhaler, der am Ende des 1ten Jahrs fällig ist, mit r^{n-1}, der des 2ten Jahrs mit r^{n-2}, etc. so wie der des nten Jahrs mit $r^{n-n} = 1$ multiplicirt werden muſs, so ist der accumulirte Werth der Rente oder $W = r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1} = p\,(r^n - 1) = pr^n - p$, d. h. man findet den accumulirten Werth der Rente 1 auf n Jahre, wenn man von dem in derselben Zeit accumulirten Werthe des Grundkapitals den gegenwärtigen Werth desselben abzieht.

Wenn die Reihe $r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$ mit $\int r^n$ bezeichnet wird, so ist $r + r + r^2 + \ldots$

$+ r^n - 1 = \frac{1}{r} \int r^n$, und W oder $\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1}{r} \int r^n$.

Wäre die jährliche Rente = R, so müfste man diese mit dem gefundenen Werthe der Rente 1 für n Jahre multipliciren, um den accumulirten Werth der Rente R für die nämliche Zeit zu finden, d. h. es wäre dieser gesuchte Werth = $p (r^n - 1) \cdot R$.

Ex. Man sucht den accumulirten Werth der jährlichen Rente zu 140 Rthlr. für 28 Jahre nach dem Zinsfufse von 4 Procent. Hier ist $p (r^n - 1) = 25 \cdot (2{,}998703 - 1) = 25 \cdot 1{,}998703 = 46{,}967583$, folglich ist für die nämliche Zeit der accumulirte Werth der Rente zu 140 Rthlr. = $140 \cdot 49{,}967583 = 6995{,}4616$.

Anm. 1. Der angeführte Satz ergiebt sich auch schon daraus, dafs der gesammte Werth der jährlichen Rente am Ende des nten Jahrs gleich seyn müsse dem aufgelaufenen Werthe eines Kapitals, das die bestimmte jährliche Rente giebt, wenn davon der gegenwärtige Werth des Kapitals wieder abgezogen wird.

Anm. 2. In einigen Handbüchern über die Zinsrechnung findet man Tabellen über die Werthe von $\frac{1}{r} \int r^n$, die bey dieser Art Berechnungen ziemlich häufig gebraucht werden. Hat man keine Tabellen, so kann man doch mit Hülfe der Tabelle über die Werthe von r^n die Werthe von $\frac{1}{r} \int r^n$ oder $(r^n - 1) p$ ziemlich leicht finden, wenn man nämlich 1 von r^n abzieht, und den Rest entweder mit p multiplicirt, oder, was gewöhnlich kürzer ist, mit $r - 1$ dividirt.

den Rente gleich dem Grundkapital nach dem gegebenen Zinsfuſs.

Anm. Es ist einleuchtend, daſs wenn von dem Werthe einer Rente die Rede ist, der Zinsfuſs gegeben seyn müsse, und daſs bey einem andern Zinsfuſse sich auch der Werth der Rente ändere, eben so einleuchtend, als daſs ein und dasselbe Kapital in einem Falle 4 und in einem andern 5 Procent etc. tragen könne.

§. 22.

Soll eine Rente $= 1$ während n Jahre jedesmal am Ende des Jahrs bezahlt werden, und wird der *accumulirte Werth* dieser Rente am Ende des nten Jahrs gesucht, so muſs der Rententhaler jedes Jahrs nach seinem accumulirten Werthe auf das Ende des nten Jahrs berechnet, und die Summe dieser accumulirten Werthe zusammengelegt werden. Da nun der Rententhaler, der am Ende des 1ten Jahrs fällig ist, mit r^{n-1}, der des 2ten Jahrs mit r^{n-2}, etc. so wie der des nten Jahrs mit $r^{n-n} = 1$ multiplicirt werden muſs, so ist der accumulirte Werth der Rente oder $W = r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1} = p\,(r^n - 1) = pr^n - p$, d. h. man findet den accumulirten Werth der Rente 1 auf n Jahre, wenn man von dem in derselben Zeit accumulirten Werthe des Grundkapitals den gegenwärtigen Werth desselben abzieht.

Wenn die Reihe $r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$ mit $\int r^n$ bezeichnet wird, so ist $r + r + r^2 + \ldots$

$+ r^{n} - 1 = \frac{1}{r}\int r^{n}$, und W oder $\frac{r^{n} - 1}{r - 1} = \frac{1}{r}\int r^{n}$.

Wäre die jährliche Rente $= R$, so müſste man diese mit dem gefundenen Werthe der Rente 1 für n Jahre multipliciren, um den accumulirten Werth der Rente R für die nämliche Zeit zu finden, d. h. es wäre dieser gesuchte Werth $= p\,(r^{n} - 1)\,R$.

Ex. Man sucht den accumulirten Werth der jährlichen Rente zu 140 Rthlr. für 28 Jahre nach dem Zinsfuſse von 4 Procent. Hier ist $p\,(r^{n} - 1) = 25 \cdot (2{,}998703 - 1) = 25 \cdot 1{,}998703 = 46{,}967583$, folglich ist für die nämliche Zeit der accumulirte Werth der Rente zu 140 Rthlr. $= 140 \cdot 49{,}967583 = 6995{,}4616$.

Anm. 1. Der angeführte Satz ergiebt sich auch schon daraus, daſs der gesammte Werth der jährlichen Rente am Ende des nten Jahrs gleich seyn müsse dem aufgelaufenen Werthe eines Kapitals, das die bestimmte jährliche Rente giebt, wenn davon der gegenwärtige Werth des Kapitals wieder abgezogen wird.

Anm. 2. In einigen Handbüchern über die Zinsrechnung findet man Tabellen über die Werthe von $\frac{1}{r}\int r^{n}$, die bey dieser Art Berechnungen ziemlich häufig gebraucht werden. Hat man keine Tabellen, so kann man doch mit Hülfe der Tabelle über die Werthe von r^{n} die Werthe von $\frac{1}{r}\int r^{n}$ oder $(r^{n} - 1)\,p$ ziemlich leicht finden, wenn man nämlich 1 von r^{n} abzieht, und den Rest entweder mit p multiplicirt, oder, was gewöhnlich kürzer ist, mit $r - 1$ dividirt.

kann man doch diese Werthe leicht finden; man sieht nämlich $\frac{1}{r^n}$ von 1 ab und multiplicirt den Rest mit p oder dividirt denselben auch mit $r - 1$.

Hat man Tabellen für $\frac{1}{r}\int r^n$ und $\int\frac{1}{r^n}$, und gebraucht einen höhern Werth als in den Tabellen enthalten ist, so kann man diese höhern Werthe daraus zusammensetzen. Es ist nämlich

$$\frac{1}{r}\int r^{n+m} = \frac{1}{r}\int r^n + r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{n+m-1}$$

$$= \frac{1}{r}\int r^n + r^n (1 + r + \ldots + r^{m-1}) = \frac{1}{r}\int r^n + r^{n-1}\int r^m,$$

also z. B. $\frac{1}{r}\int r^{125} = \frac{1}{r}\int r^{100} + r^{99}.\int r^{25}$.

Eben so ist $\int\frac{1}{r^{n+m}} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+2}}$

$$+ \ldots + \frac{1}{r^{n+m}} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^m}\right)$$

$= \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}.\int\frac{1}{r^m}$, folglich z. B. $\int\frac{1}{r^{125}} = \int\frac{1}{r^{100}} + \frac{1}{r^{100}}.\int\frac{1}{r^{25}}$.

§. 24.

Sollte die Rente erst *am Ende des mten Jahrs zu laufen anfangen* und dann n Jahre fortdauern, so müfste man den baaren Werth einer Rente auf n Jahre, da derselbe hier erst nach m Jahren zahlbar wird, noch auf m Jahre discontiren, d. h. es ist der Werth der Rente 1, die nach m Jahren anfängt zu laufen und dann n Jahre hindurch ge-

zahlt wird, $= \frac{p}{r^m}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = p\left(\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^{m+n}}\right)$.

§. 25.

Sind der gegenwärtige Werth V der Jahrrente, der Zinsfuſs $r - 1$ und die Zahl der Jahre n gegeben, und wird die dazu gehörige jährliche Rente R gesucht, so ist nach dem Vorhergehenden (§. 23). $V = R\,p\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$, woraus man $R =$

$\frac{V}{p\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)} = \frac{V}{\int \frac{1}{r^n}}$ erhält, d. h. die jährlich zu zahlende Rente, womit ein Kapital in gewissen Jahren zugleich verzinset und bezahlt wird, findet man, wenn man das Kapital durch den discontirten Werth der Rente 1 auf die nämliche Zeit dividirt.

Hiernach ist also zu rechnen, wenn ein Werth gegeben ist, wofür nach einem bestimmten Zinsfuſse auf eine gewisse Reihe von Jahren eine Rente gekauft werden soll, oder wenn eine bestimmte nach ihrem gegenwärtigen Werthe angegebene Summe durch eine Rente in gewissen Jahren bezahlt werden soll.

R begreift hier sowohl den jährlichen Zinsenbelauf U für das Kapital als den *Kapitalabtrag* Q, folglich ist $R = Q + U$, und $Q = R - U$. Also hat man $Q = \frac{V}{p\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)} - \frac{V}{p} = \frac{V}{p\,(r^n - 1)}$

$= \frac{V}{\frac{1}{r}\int r^n}$, d. h. der *Abtrag*, der ausser der Zinse jährlich zu entrichten ist, um in der bestimmten Zeit ein baares Kapital zu zahlen, ergiebt sich, wenn das Kapital durch den accumulirten Werth der Rente 1 auf die nämliche Zeit dividirt wird.

Setzt man $V = 1$, so ist R die Rente auf die gegebene Zeit, deren baarer Werth $= 1$ ist, folglich ist dann $R = \frac{1}{\int \frac{1}{r^n}}$. Und wenn man hier $R = q + u$ setzt, so wird q oder der Kapitalabtrag, wodurch das Kapital 1 in der Zeit n aufgebracht wird, $= \frac{1}{p\,(r^n - 1)} = \frac{1}{\frac{1}{r}\int r^n}$.

Ex. Man fragt, wie groſs eine Jahrrente seyn müsse, wodurch in 28 Jahren nach dem Zinsfuſse von 4 Procent das Kapital $= 100$ verzinset und abgetragen wird. Hier ist $\frac{V}{\int \frac{1}{r^n}} = \frac{100}{16,663063} = 6,0013$ .. Dagegen würde für denselben Fall $Q = \frac{100}{49,967583} = 2,0013$ ..

Anm. Diese Art der Schuldentilgung, wie sie hier angegeben ist, durch eine unveränderliche Rente, theils zur Verzinsung theils zum Abtrag des Kapitals, muſs jedoch nicht verwechselt werden mit einer andern Art der Tilgung, wodurch jährlich ein gleicher Theil des Kapitals abbezahlt und der un-

berichtigte Theil der Schuld verzinset wird. Im erstern Falle wird jährlich eine gleiche Summe vom Schuldner gegeben, wovon zuerst der unberichtigte Theil des Kapitals verzinset, nachher aber, soweit es jedesmal geschehen kann, ein Theil der Schuld abbezahlt wird. Im zweiten Falle wird, da jedes Jahr ein gleicher Theil des Kapitals abbezahlt und der restirende Theil verzinset werden soll, die jährliche Rente immer kleiner. Von dem letzten Abtrage wird nachher noch gehandelt werden. (S. §. 38).

§. 26.

Wäre ein am Ende des nten zahlbarer Werth $= W$, imgleichen r gegeben, und würde die Rente R gesucht, die mit ihren Zinsen und Aufzinsen in n Jahren den Werth W giebt, so wird $W = p\,(r^n - 1)\,R$ (§. 23) folglich $R = \frac{W}{p\,(r^n - 1)} = \frac{W}{\frac{1}{r}\int r^n}$.

Setzte man $W = 1$, so würde $R = \frac{r}{\frac{1}{r}\int r^n}$.

Anm. Dies ist gleich dem im §. 25 angegebenen Kapitalabtrag, welches auch begreiflich ist, da durch den Kapitalabtrag in n Jahren ebenfalls der Werth des Kapitals am Ende des nten Jahrs aufgebracht seyn soll.

§. 27.

Wäre ein gegenwärtiger Werth V, die jähr-

liche Rente R und r gegeben, und würde die *Zahl der Jahre* gesucht, worin der gegebene Werth auf gebracht werden kann, so hat man wieder $V = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1} . R$, also $\frac{R}{r^n} = R - (r - 1) V$ und $r^n = \frac{R}{R - (r - 1) V}$, daher n. log. r = log. R — log [R — (r — 1) V], und $n = \frac{\log. R - \log. [R - (r - 1) V]}{\log. r}$

Wäre anstatt R der jährliche Abtrag Q gegeben, so hätte man, da R = Q + (r — 1) V ist, $n = \frac{\log. [Q + R (r - 1) V] - \log. Q}{\log. r}$.

Ex. Wenn V = 1, R = 0,06 und r = 1,04, so wird $n = \frac{\log. 0{,}06 - \log. 0{,}02}{\log. 1{,}04}$ $= \frac{0{,}7781513 - 2 - 0{,}3010300 + 2}{0{,}0170333} = 28{,}0111$.

Für r = 1,05 und R = 0,06 würde n = 36,7239. Wäre bey dem nämlichen Zinsfuſse R = 0,07, so hätte man n = 25,6765.

Anm. Für die überschieſsenden Theile des Jahrs muſs die Rente, streng genommen, nach §. 16 berechnet werden; indessen ist oben §. 18 gezeigt worden, daſs der Unterschied nicht groſs ist, wenn man die Rente innerhalb des Jahrs der Zeit proportional berechnet.

Soll die Zahlung nur auf ganze Jahre gehen und R sowohl als r unverändert bleiben, so kann der am Ende des nten Jahrs an der aufzubringenden Summe noch manglende Theil nach seinem discontirten Werthe von dem Rentengeber sofort vergütet werden. Es ist z. B. für R = 0,06 und r = 1,05, n =

56,7239. Soll diese nämliche Rente nur bis an das Ende des 36sten Jahrs bezahlt werden, so ist der baare Werth einer Rente 1 auf 36 Jahre nach dem Zinsfusse von 5 Procent = 16,54685, welches mit 0,06 multiplicirt, den baaren Werth der Jahrrente von 0,06 auf die nämliche Zeit = 0,992811 = 1 − 0,007188, giebt. Wenn also diese letztern 0,007188 sofort in dem Kapital 1 abgezogen werden, so ist am Ende des nten Jahrs nichts mehr zu erlegen.

§. 28.

Wenn gegeben wäre der gegenwärtige Werth = 1 der Rente, die jährliche Rente R oder auch der Abtrag q und die Zahl der Jahre n, und daraus der Zinsfuß r gesucht werden sollte, so hat man nach dem vorhergehenden §. $r^n = \frac{R}{R-(r-1)}$

$= 1 + \frac{r-1}{R-r+1}$ und $r = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r-1}{R-r+1}\right)}$, oder auch, wenn $q = R-(r-1)$ gegeben ist, $r^n = \frac{q+r-1}{q} = 1 + \frac{r-1}{q}$ und $r = \sqrt[n]{\left(1+\frac{r-1}{q}\right)}$.

Hieraus kann man r durch Näherung finden, indem man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens die muthmaſslichen Gränzen für r setzt und daraus den Werth auf der andern Seite des Gleichheitszeichens berechnet, welche Operation man so lange fortsetzt, bis die Werthe auf beiden Seiten mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zusammenstimmen.

Ex. Ein Kapital $= 1$ soll in 25 Jahren dadurch bezahlt werden, daſs jährlich, auſser den Zinsen, 3 Procent Abtrag entrichtet werden, es wird gefragt, welcher Zinsfuſs hierbey zum Grunde liegt. Hier ist nun $r = \sqrt[25]{(1 + \frac{r-1}{0{,}03})}$

Um bey der ersten Annahme von r hinter dem Gleichheitszeichen nicht zu sehr zu fehlen, kann man mit Hülfe der Tabellen über die accumulirten Werthe der Jahrrenten suchen, zwischen welche darin angegebene Zinsfüſse r fällt. Z. B. bey 2 Procent giebt nach den Tabellen die Rente 1 auf 25 Jahre einen accumulirten Werth von 32,03, bey $2\frac{1}{2}$ Procent aber von 34,15; ersteres giebt mit 0,03 multiplicirt einen Werth von 0,9609, letzeres von 1,0245. Da nun die jährliche Rente 0,03 in 25 Jahren nach dem Zinsfusze r einen Werth von 1 haben soll, so ist $r > 1{,}02$, und $r < 1{,}025$, der Vermuthung nach näher bey 1,025 als bey 1,02. Nimmt man hiernach fürs Erste r hinter dem Gleichheitszeichen $= 1{,}023$ an, so ist $\sqrt[25]{(1 + \frac{0{,}023}{0{,}03})} =$ $\sqrt[25]{1{,}76666} = 1{,}023015$. Setzt man diesen letzten Werth wieder hinter dem Gleichheitszeichen, so erhält man $\sqrt[25]{(1 + \frac{0{,}023015}{0{,}03})} = 1{,}023036$. Auf diese Weise findet man durch fortgesetzte Operation die ersten Decimalziffren für $r = 1{,}02311$ . .

Wenn R gegeben und daraus so wie übrigens aus der angegebenen Gleichung q und r zu bestim-

men wäre, so ergiebt sich aus der Gleichung $r^n = \frac{R}{R - r + 1} = \frac{R}{q}$, daſs r zunimmt so wie q abnimmt und umgekehrt. Wenn also nach dem auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angenommenen Werthe für r, derselbe auf der linken Seite zu groſs ausfällt, so muſs man auf der rechten Seite r kleiner als vorher annehmen, damit

$q = R - \overline{r - 1}$ gröſser werde, und umgekehrt.

Anm. Diese Operation ist mühsam, indessen kömmt die Aufgabe nicht oft vor. Wo übrigens der Zinsfuſs, wonach der jährliche Abtrag geleistet werden soll, gegeben ist, wie dies gewöhnlich geschieht, da kann man auch auf eine andre Weise bestimmen, was eigentlich an Zinsen bezahlt wird, wie im folgenden §. gezeigt werden wird.

§. 29.

Bey Anleihen wird zuweilen dem Gläubiger, auſser der Provision, eine *Prämie* in Obligationen zugestanden, so daſs ihm an Kapital mehr verzinset und zurückbezahlt wird als er gegeben hat, und es wird mitunter für die Prämie ganz oder zum Theil ein besonderer Zinsfuſs festgesetzt. Auch wird oft ein *terminlicher Abtrag* sowohl auf das wirklich bezahlte Kapital als die Prämie, und zwar gewöhnlich nach einem niedrigern Zinsfuſse als für die Anleihe bestimmt ist, bedungen. Wenn nun in diesem Falle gefragt wird, wie viel die jährliche Zinse beträgt, so berechnet man, was an jährlicher Rente entrichtet

wird, dividirt den Betrag mit dem baar empfangenen Kapital, um die Rente = R für das Kapital 1 zu erhalten, und sucht sodann aus R nach dem §. 28. den Exponenten ϱ, wonach der jährliche Abtrag für das Kapital 1 = R — ϱ + 1 ist.

Es sey das baar gezahlte Kapital = C, die Prämie = P, beide sollen nach dem Zinsfuſse r—1 in n Jahren verzinset und in Abträgen bezahlt werden; hiernach wird die jährlich zu zahlende Rentensumme $= (C + P)\,\dfrac{r - 1}{1 - \dfrac{1}{r^n}}$ (§. 25), und für das Kapital 1 wird $R = \left(1 + \dfrac{P}{C}\right)\dfrac{r - 1}{1 - \dfrac{1}{r^n}}$. Würde der Theil P der Prämie nach dem Zinsfuſse r und ein anderer Theil $\mathfrak{P}$ nach dem Zinsfuſse $\mathfrak{r}$ verzinset und abgetragen, so wäre die jährlich zu zahlende Rente $= C.\,\dfrac{r - 1}{1 - \dfrac{1}{r^n}} + P.\,\dfrac{r - 1}{1 - \dfrac{1}{r^n}} + \mathfrak{P}\,\dfrac{\mathfrak{r} - 1}{1 - \dfrac{1}{\mathfrak{r}^n}}$, und für das Kapital 1, R =

$$\frac{r - 1}{1 - \dfrac{1}{r^n}} + \frac{P}{C}\,\frac{r - 1}{r - \dfrac{1}{r^n}} + \frac{\mathfrak{P}}{C}\,\frac{\mathfrak{r} - 1}{r - \dfrac{1}{\mathfrak{r}^n}}.$$

Hieraus findet man den Exponenten der Zunahme oder ϱ =

$\sqrt[n]{\left(\frac{R}{R-\varrho+1}\right)}$ und den Kapitalabtrag, nämlich auf das baar empfangene Kapital, $= R + 1 - \varrho$.

Es wird hiebey indessen angenommen, daſs der accumulirte Werth des Kapitalabtrags nach demselben Exponenten ϱ berechnet werde, wonach die Anleihe verzinset wird. Wenn aber die Frage nach dem Zinsfuſse eigentlich dahin gehen sollte zu wissen, was der Schuldner für die Benutzung des fremden Kapitals jährlich entrichtet, und dabey die Wiederbezahlung als ein von der Anleihe verschiedenes Geschäft betrachtet würde, so könnte es gestattet werden, in der oben angegebenen gesammten jährlichen Rente $=$

$C \frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}} + P \frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}} + \mathfrak{P} \frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}}$ den jährlichen Abtrag auf C nach dem Zinsfuſse r mit $C\frac{r-1}{r^n-1}$ abzuziehen, wonach sodann an Zinsenbelauf übrig bleibt $C(r-1) + P\frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}} + \mathfrak{P}\frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}}$, welches, mit C dividirt, die Zinse für 1 Rthlr. giebt $=$

$$r - 1 + \frac{P}{C}\frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}} + \frac{\mathfrak{P}}{C}\frac{r-1}{1-\frac{1}{r^n}}.$$

Ex. Es werde eine Anleihe gemacht auf 6000000 Rthlr. An Provision gehen ab 375000 Rthlr., und es werden also baar ausbezahlt 5,625000

Rthlr. Das Kapital soll mit 5 Procent verzinset und in 36¾ Jahren jedesmal mit 1 Procent zurück bezahlt werden. Noch werden den Darleihern 2000000 Rthlr an Prämie zugesichert, die mit 6 Procent verzinset und nach demselben Zinsfuſse in 36¾ Jahren abbezahlt werden sollen.

Hier ist nun das obige C = 5,625000 Rthlr. P = 375000 Rthlr., r = 1,05 und (C + P)

$\frac{r - 1}{1 - \frac{1}{r^n}} =$ 360000

Ferner ist $\mathfrak{P}$ = 2000000 Rthlr., r =

1,06, und $\mathfrak{P}\frac{r - 1}{1 - \frac{1}{r^n}} =$ 135976

Folglich wird die gesammte jährliche

Renten - Summe = 495976 Rthl.

Diese Rentensumme, mit 5625000 dividirt, giebt an jährlicher Rente für 1 Rthlr. des baar ausbezahlten Kapitals 0,08817, woraus man den Zinsfuſs $\varrho - 1 = 0,08355$ und den Kapitalabtrag q für das Kapital 1 = 0,00462 findet.

Wollte man nach der vorher angegebenen zweiten Formel rechnen, so gienge in der jährlichen Rentensumme von 495976;

ab der Abtrag auf das baar empfangene Kapital nach dem bedungenen Zinsfuſse 0,05, oder $C\frac{r - 1}{r^n - 1}$ mit 56250

und es blieben an Zinsen 439726 Rthlr,

die mit 5625000 Rthlr. dividirt, für das Kapital 1 eine Zinse gäben von 0,07817. Hierbey wäre dann der jährliche Abtrag für 1 Rthlr. gleich 0,01.

Anm. 1. Welche dieser beiden Methoden man bey der Berechnung wählen solle, liegt ausserhalb der rein mathematischen Vorschriften. Die Auflösung der Aufgabe nach der ersten Methode ist theoretisch vollkommen bestimmt und giebt nur einen einzigen Werth, sie setzt indessen voraus, dass der Gläubiger den Kapitalabtrag auf dieselbe Weise benutze, wie er sich die Anleihe verzinsen lässt; die Auflösung nach der andern Methode lässt im Allgemeinen unzählig viele Werthe zu, und es hängt von der Beurtheilung der Verhältnisse ab, welchen Zinsfuss man für den Abtrag annehmen will. Es werde z. B. zur Verzinsung und Abbezahlung eines Kapitals von 100 Rthlr. eine jährliche Rente von 7 Rthlr. während 28 Jahre bezahlt, und nach dem Zinsfuss, der dabey zum Grunde liegt, gefragt. Soll nun für die Benutzung der Anleihe und den Abtrag der nämliche Zinsfuss gelten, so ist dieser = 0,054 . . und der jährliche Abtrag auf 100 Rthlr. also = 1,6. . Können aber verschiedene Zinsfüsse für die Kapitalverzinsung und den Abtrag angenommen werden, so kann man den Exponenten r für die Benutzung des Kapitals willkührlich, jedoch kleiner als 1,07, annehmen, wonach der Abtrag sodann = 1,07 — r wird, und man kann immer einen Exponenten t finden, wonach der jährliche Abtrag in der gegebenen Zeit bis zu 100 Rthlr. anwächst. Wenn z. B. r = 1,05 ist, so wird der jährliche Abtrag auf 100 Rthlr. = 2 Rthlr., und t = 1,04. Wäre r = 1,045, so wäre der Abtrag auf 100 Rthlr. = 2½ und t etwas grösser als 1,025 etc.

Anm. 2. Indessen ist doch, wenn solchergestalt bey dergleichen Anleihen für die Benutzung der Anleihe und den Abtrag ein gemeinschaftlicher Zinsfuss gefunden ist, dieser nur so lange von beiden Seiten anzunehmen, als es in jeder Hinsicht bey den nämlichen Bedingungen verbleibt. Würde man z. B.

späterhin darüber einig, dass die jährlichen Renten bis zum Ablauf des festgesetzten Abtragstermins stehen bleiben und dann auf einmal mit ihren aufgelaufenen Zinsen und Zinseszinsen bezahlt werden sollten, so wäre es zum offenbaren Nachtheil des Schuldners, wenn hiebey der ausgemittelte höhere Zinsfuss zum Grunde gelegt werden sollte. Bliebe z. B. in dem oben angeführten Falle die Rente für alle 36¾ Jahre bis zum Ablauf derselben stehen und sollte dann nach dem Zinzfusse von 0,08355 bezahlt werden, so betrüge ihr derzeitiger Werth 107054300 Rthlr. Hätte dagegen der Schuldner Gelegenheit anderswo die jährlich zu zahlende Rente, auch selbst zu 6 Procent, aufzunehmen, unter der Bedingung, dass sie mit den aufgelaufenen Zinsen am Ende des oben angegebenen Termins auf einmal wieder bezahlt werden sollte, so würde er dann nur 70417700 Rthlr. zu entrichten haben. Wollte man auf der andern Seite nach Verlauf einiger Zeit sich darüber vereinigen, den Rückstand der Schuld auf einmal abzutragen, so würde es nun zum Nachtheil des Gläubigers gereichen, wenn die Berechnung nach dem gefundenen höhern Zinsfusse geschehen sollte. Wären z. B. in dem obigen Falle 16¾ Jahre verflossen und noch 20 Jahre der Rentenzahlung übrig, und würde diese auf einmal nach dem Zinsfuſse von 0,08355 bezahlt, so erhielte der Gläubiger dann nur 4743554 Rthlr. Würde ihm dagegen diese Rentenzahlung für 20 Jahre auch nur nach dem Zinsfusse von 6 Procent angerechnet, so würde er doch 5688784 erhalten haben.

Anm. 3. Ueberhaupt muſs man bey diesen zusammengesetzten Berehnungen sich vor einer unrichtigen Anwendung der gegebenen Bestimmungen sorgfältig hüten. Nach dem, was bereits zur Erläuterung der obigen Aufgabe vorher angeführt worden, füge ich hier nur noch ein mit dem in dem §. angeführten verwandtes Beispiel hinzu, um auf einen möglichen Irrthum bey Berechnungen dieser Art aufmerksam zu machen.

Es leihe jemand 600 Rthlr. die er nach dem 4 Procentfusse verzinsen und in 28 Jahren abtragen soll. Zugleich ver-

pflichte er sich eine Prämie von 200 Rthlr. in derselben Zeit nach dem 6 Procentfusse zu verzinsen und abzutragen. Nun beträgt der accumulirte Werth der 600 Rthlr. nach dem Zinsfusse von 4 Procent am Ende des 28sten Jahrs

600 . 2,9987 =	1799, 22;
der accumulirte Werth der 200 Rthlr. nach den 6 Procentfusse am Ende derselben Zeit aber ist = 200 . 5,1116 =	1022, 32;
folglich der accumulirte Werth beider Kapitale =	2821, 54.

Wollte man nun suchen, nach welchem Zinsfusse 600 Rthlr. in 28 Jahreu zu 2821, 54 anwachsen, so fände man denselben = 0,0568, und den jährlichen Abtrag auf das Kapital 1 = 0,01534, wonach der Schuldner folglich jährlich an den Gläubiger 43,284 bezahlen würde. Er soll aber nach den festgesetzten Bedingungen entrichten:

für 600 Rthlr. mit Abtrag 6 Procent =	36
für 200 Rthlr. mit Abtrag 7,459 Procent =	14,918
in allem	50,918.

Folglich ist die obige Berechnung hier gar nicht anwendbar. Sie würde voraussetzen, entweder dafs der Gläubiger dem Schuldner das Kapital bis zu Ende des 28sten Jahrs nach dem Zinsfusse von 0,0568 liefse und so den accumulirten Werth auf einmal annähme, oder dafs er ihm die jährliche Rente von 43,284 bis zu Ende des 28sten Jahrs nach dem erwähnten Zinsfusse anrechnete. Es hat sich aber im gegenwärtigem Falle der Gläubiger aufser den Zinsen von zusammen 36 Rthlr. einen jährlichen Abtrag von 14,918 bedungen, wovon er 12 Rthlr. nach dem Zinsfusse 0,04, und 2,918 nach dem Zinsfusse 0,06 anrechnet, um in 28 Jahren die zu zahlenden 800 Rthlr. zu erhalten.

§. 30.

Wenn übrigens durchgängig der nämliche Zinsfuſs bey den Berechnungen zum Grunde liegt, so ist es in mathematischer Hinsicht völlig gleichgültig, ob ein Kapital, das nach einer gewissen Zeit zu zahlen ist, wirklich zu Ablauf der bestimmten Zeit oder durch terminliche Abträge oder sofort nach seinem discontirten Werthe bezahlt wird. Wenn aber die Verzinsung des Kapitals, und dessen Zurückbezahlung nach verschiedenen Zinsfüſsen geschehen sollen, so ist es nicht gleichgültig, ob die Zurückzahlung später oder früher geschieht. Wie nämlich für den Schuldner bey der Verzinsung der niedrigere Zinsfuſs der vortheilhaftere ist, so ist für ihn bey der Wiederbezahlurg durch Discont oder Abtrag der höhere Zinsfuſs zuträglicher, indem nach demselben ein kleineres gegenwärtiges Kapital oder geringere Abträge erfordert werden, um in einer bestimmten Zeit zu einer gegebenen Summe anzuwachsen, als nach einem niedrigern Zinsfuſse. Eine Anleihe wird daher für den Schuldner schwerer, wenn die Zurückzahlung durch Discont oder Abtrag nach einem niedrigern Zinsfuſse geschehen soll, als für die Benutzung des Kapitals bestimmt ist. Auch wird in diesem Falle die Anleihe um so lästiger für den Schuldner, je frühzeitiger oder je gröſser der Abtrag ist, je früher der discontirte Werth gekürzt oder je grösser derjenige Theil des Kapitals ist, wofür der discontirte Werth sofort abgerechnet wird. Durch

die folgenden Beispiele wird dies noch deutlicher werden.

Ex. 1. Wer zu 4 Procent 100 Rthlr. leihet, die am Ende des 28sten Jahrs wieder bezahlt werden sollen, sich aber den discontirten Werth nach den 4 Procentfuſse mit $33\frac{1}{3}$ Rthlr. sofort abziehen läſst, bekömmt nur $66\frac{2}{3}$ Rthl., wofür er 28 Jahre hindurch 4 Rthlr. jährlicher Rente zahlen muſs. Würden die 100 Rthlr. nach dem Zinsfuſse von 3 Procent sofort discontirt, so müſste der Schuldner sich 42,93 Rthlr. kürzen lassen, behielte also nur 57,07 Rthlr. zur Benutzung, wovon er gleichwohl zufolge der Verabredung 4 Rthlr. jährlicher Rente entrichten müſste.

Ex. 2. Wenn in dem im vorigen §. angeführten Falle überall kein andrer Abtrag entrichtet werden sollte als für die Prämie, welcher Abtrag mit zur Zinse gehört, so wäre die jährliche Rentensumme = 435976 Rthlr., wonach die Zinse 7,7506 Procent betrüge.

Nach der im gedachten §. angegebenen Berechnung beträgt die Zinse in dem Fall, wenn das baar empfangene Kapital nach dem Zinsfuſse zu 5 Procent in $36\frac{1}{4}$ jährlichen gleichen Terminen abgetragen werden soll, 8,355 Procent.

Sollte der Abtrag auf das Kapital so wie vorher geschehen, die Prämie von 2000000 Rthlr. aber sofort nach ihrem discontirten Werthe zu 6 Procent mit 234984 Rthlr. abgezogen werden, so blieben von dem baaren Kapital nur 5390016 Rthlr. übrig, und an jährlicher Rente wären zu entrichten 480000

Rthlr. Danach würde die Rente in Procenten = 8,905, wovon 8,45 Zinse und 0,455 Abtrag wären.

Würde gar ausserdem noch der discontirte Werth des dargeliehenen Kapitals der 6000000 Rthlr. nach dem 5 Procentfusse mit 1000000 Rthlr. abgezogen, so blieben an Kapital nur 4390016 Rthlr., an jährlicher Rente aber wären zu bezahlen 420000 Rthlr. Dies gäbe die Rente in Procenten zu 9,5671, wovon die Zinse 9,1881, der Abtrag aber 0,379 betrüge.

§. 31.

Sollte ein Tilgungsfonds durch eine jährliche unveränderliche Rente R errichtet werden, die nach einem gegebenen Zinsfusse $r - 1$ benutzt würde, so fände man den accumulirten Werth der Rente am Ende des $n$ten Jahrs oder W unmittelbar aus dem §. 26, es wäre nämlich $W = \frac{r^n - 1}{r - 1} R$.

Wenn, wie im §. 20 angenommen worden, die zu Anfange jedes Jahrs in Münze zu zahlende Rente R jedesmal in Papiergeld umgesetzt, auch die in Münze fälligen Zinsen des Papiergeldes sofort wieder in Papiergeld verwechselt würden, so wäre, nach §. 20, am Ende des $n$ten Jahrs die Rente des ersten Jahrs $= m (1 + u m)^n R$, die des zweiten Jahrs $= m (1 + u m)^{n-1} R$ etc., die des letzten Jahrs $= m (1 + u m) R$. Folglich wäre der ge-

sammte Werth in Papier am Ende des nten Jahrs oder $W = R.m \frac{(1 + u m)^{n+1} - (1 + u m)}{1 + u m - 1}$

$= (1 + u m) R \frac{(1 + u m)^n - 1}{u}$. Würde die Rente aber am Ende jedes Jahrs bezahlt, so wäre der Werth derselben in Papier am Ende des nten Jahrs =

$\frac{(1 + u m)^n - 1}{u} R$.

Wäre z. B. $R = 10000$, $r = 1{,}05$, $m = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$ und $n = 40$, so würde $u m = 0{,}06$, $1 + u m = 1{,}06$, und der Werth für den zuletzt angegebenen Fall wäre $= \frac{10{,}285718 - 1}{0{,}05} 10000 = 1857143{,}6$.

§ 32.

Wenn fortwährend am Ende jedes nten Jahrs eine gewisse Summe = F zu erheben ist, und der gegenwärtige Werth dieser Hebung gesucht wird, so ist F der accumulirte Belauf der Zinsen und Zinseszinsen eines gewissen Kapitals = C während der bestimmten n Jahre, und $F = Cr^n - C$, also $C = \frac{1}{r^n - 1} F$. (Auch ist $C = F \left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{2n}} + \frac{1}{r^{3n}} + \ldots\right)$ ins Unendliche, ebenfalls $= \frac{1}{r^n - 1} F$.)

Hieraus findet man den Werth eines reinen Ertrags, der jedesmal am Ende des $n$ten Jahrs zu erheben ist, einer Ausgabe, die jedesmal nach einer gewissen Reihe von Jahren vorfällt etc.

Wäre die erste Zahlung in m Jahren fällig und $m < n$, so müſste man zu dem auf m Jahre discontirten Werthe des obigen Kapitals noch den gegenwärtigen Werth der ersten Zahlung hinzufügen, folglich wäre dann der Werth oder $C =$

$$F\left(\frac{1}{(r^n - 1)\, r^m} + \frac{1}{r^m}\right) = \frac{1 + r^n - 1}{(r^n - 1) r^m} . F =$$

$$\frac{r^{n-m}}{r^n - 1} . F.$$

Sollte nicht das Kapital C selbst, sondern anstatt desselben eine *jährliche Rente* R bezahlt werden, die dem Kapital nach dem Zinsfuſse $r - 1$ entspräche, so wäre für den zuerst angegebenen Fall $R = (r - 1)\ C = \frac{r - 1}{r^n - 1} . F = \frac{F}{\frac{1}{r}\int r^n}$. Für den 2ten Fall aber würde $R = \frac{(r - 1)\, r^{n-m}}{r^n - 1}\ F =$ $\frac{r^{n-m}}{\frac{1}{r}\int r^n}\ F$, wo nämlich $\frac{1}{r}\int r^n$ der accumulirte Werth der Rente 1 auf n Jahre ist.

Ex. Für $r = 1{,}04$ und $n = 30$ wird $C =$ $\frac{1}{1{,}04^{30} - 1} .\ F = \frac{1}{2{,}24398} . F = 0{,}445752 .\ F$ und

$R = \frac{F}{56{,}084938} = 0{,}0178301$ F. Für denselben Zinsfuſs und n = 80 wird C = 0,045351 F und R = 0,001814 F. Für den nämlichen Zinsfuſs und n = 120 hätte man C = 0,009118 F und R = 0,0003647 F.

Anm. In Cotta's Entwurf einer Anweisung zur Waldwerth-Berechnung S. 62 etc. findet sich eine Tabelle über die Werthe von $\frac{1}{r^n - 1}$ für n von 1 an bis 220 und für die gewöhnlichsten Zinsfüſse.

§. 33.

Soll die jährliche Rente 1 *in Terminen* innerhalb des Jahrs bezahlt werden, so kömmt es, wie schon in den §. §. 16 bis 18 bemerkt worden, darauf an, wie die terminlichen Theile der Rente und der Zinsfuſs dafür angenommen werden. Da übrigens in den gedachten §. §. der Belauf der jährlichen Rente r — 1 mit ihren Zwischenzinsen am Ende des Jahrs bereits gefunden ist, und hier der Belauf der jährlichen Rente 1 mit ihren Zwischenzinsen gesucht wird, welcher sich zu dem erstern verhält wie 1 : r — 1, so findet man den Belauf der Rente 1, wenn man überall den Belauf der Rente r — 1 mit $\frac{1}{r-1}$ multiplicirt.

Setzt man nun *erstlich* für jeden nten Theil

des Jahrs nach §. 16 die Rente $= \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1}$, und die Zwischenzinsen für jeden Theil, der $\frac{m}{n}$ des Jahrs vor dem Ablauf deſselben fällig ist, $= r^{\frac{m}{n}} - 1$, so ist die Summe aller Theile mit ihren Zinsen am Ende des Jahrs $= \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} (r^{\frac{n-1}{n}} + r^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + r^{\frac{1}{n}} + r^0) = \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} \cdot \frac{r - 1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} = 1$; die Jahrrente bleibt hier unverändert, so wie auch der baare Werth einer solchen immerwährenden Jahrrente $= p$ bleibt.

Setzt man *zweitens*, wie vorher, die Rente für $\frac{1}{n}$ des Jahrs wieder $= \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1}$, die Zwischenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber $= \frac{m}{n} \cdot \overline{r - 1}$, so erhält man nach §. 18 num. 1 den Belauf der Rententheile mit ihren Zinsen am Ende des Jahrs $= (n + \frac{n-1}{2} \overline{r - 1}) \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} = \frac{2n + (n-1)(r-1)}{2} \cdot \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1} =$

$\frac{(r+1)\,n-(r-1)}{2}\cdot\frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$, und wenn $n=\infty$ gesetzt wird, so ist dieser Werth $=\frac{r+1}{2}\cdot\frac{\text{log. nat. } r}{r-1}$ $=\frac{r+1}{2}\,\frac{p}{\pi}$ (wo π anstatt $\frac{1}{\text{log. nat. } r}$, so wie p anstatt $\frac{r}{r-1}$ gesetzt ist); der Werth einer solchen immerwährenden Rente nach dem Ziusfuſse $r-1$ aber wäre $=p.\ \frac{r+1}{2}\,\frac{p}{\pi}=\frac{r+1}{2}\,\frac{p^2}{\pi}$.

Für $r=1{,}04$ wird der Belauf dieser Rente $=1{,}00012817$, für $r=1{,}05$ aber $=1{,}0001983$; die baaren Werthe solcher immerwährenden Renten sind ersterer nach dem jährlichen Zinsfuſse von 4 Procent $=$ 25,003204, letzterer aber nach dem Zinsfuſse von 5 Procent $=$ 20,003866.

Soll *drittens* die Rente für $\frac{1}{n}$ des Jahrs $=\frac{1}{n}$, die Zwischenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber $=r^{\frac{m}{n}}-1$ seyn, so hat man den Belauf der Rente am Ende des Jahrs nach §. 18. num. 2 $=\frac{(r-1)^2}{r-1\,.\,n\,(r^{\frac{1}{n}}-1)}$ $=\frac{r-1}{n\,(r^{\frac{1}{n}}-1)}$, und wenn $n=\infty$ gesetzt wird, $=$ $\frac{r-1}{\text{log. nat. } r}=\frac{\pi}{p}$ (π wie vorher $=\frac{1}{\text{log. nat. } r}$ ge-

setzt), den baaren Werth einer solchen immerwährenden Rente nach dem Zinsfuſse $r - 1$ aber $=$
$p \frac{\pi}{p} = \pi$.

Für $r = 1{,}04$ wird diese jährliche Rente $= 1{,}0198692$, für $r = 1{,}05$ aber $= 1{,}02479$; der baare Werth einer solchen immerwährenden Rente ist ersterer nach dem Zinsfuſse von 4 Procent $= 25{,}49673169$, letzterer nach dem Zinsfuſse 5 Procent $= 20{,}4958$.

Ist *viertens* die Rente für $\frac{1}{n}$ des Jahrs wieder $= \frac{r}{n}$, die Zwischenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber $= \frac{m}{n} \cdot \overline{r - 1}$, so erhält man nach §. 17 den Belauf der Rente am Ende des Jahrs $= \frac{r-1}{r-1} + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{(r-1)^2}{r-1} = 1 + \frac{n-1}{2n}(r-1)$, und wenn n unendlich wird, $= 1 + \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2}$, den baaren Werth dieser immerwährenden Rente nach dem Zinsfuſse $r - 1$ aber $= \frac{r+1}{2} p$.

Diese Rente wird für den Zinsfuſs von 4 Procent $= 1{,}02$, für 5 Procent aber $= 1{,}025$, so wie der baare Werth der immerwährenden Rente ersterer zu 4 Procent $= 25{,}5$, letzterer zu 5 Procent aber $= 20{,}5$.

Anm. 1. Wenn man unter num. 3 und 4, $n = 2$ setzt, so erhält man den Belauf der jährlichen Rente, das einemal $=$

$\frac{r-1}{2(r^{\frac{1}{2}}-1)}$, das andre mal $= 1 + \frac{r-1}{4}$. Ersteres giebt für $r = 1{,}04$ die Rente zu 1,0099.., für $r = 1{,}05$ aber zu 1,01235. Letzteres giebt im ersten Falle 1,01, im zweiten aber 1,0125. Wenn also jedes halbe Jahr $\frac{1}{2}$ an Rente bezahlt, der Fundamentalzinsfuſs aber beibehalten werden sollte, so hätte, da der jährliche Belauf der halbjährlich mit $\frac{1}{2}$ zu zahlenden Rente nach den 4 Procentfuſse beinahe 1,01, nach dem 5 Procentfuſse aber beinahe 1,0125 ist, der Rentennehmer für eine solche Rente das erstemal 1 Procent, das andre mal $1\frac{1}{4}$ Procent mehr an Kapital zu bezahlen als für eine Rente, die jedesmal am Ende des Jahrs mit 1 gehoben werden sollte.

Anm. 2. Uebrigens kann man die hier angegebenen baaren Werthe der verschiedenen in augenblicklichen Terminen zahlbaren Renten nicht in dem Sinne Grundkapitale nennen, daſs sie nach dem Zinsfuſse $r - 1$ *jährlich* eine Rente $= 1$ geben. In diesem Sinne wäre das Grundkapital, nach §. §. 17 und 18, für Num. 2 im gegenwärtigen §. $= \frac{2}{r+1 \,.\, l.\, r}$ für num. 3 aber $= \frac{l.\, r}{(r-1)^2}$ und für Num. 4 $= \frac{2}{(r+1)\,(r-1)}$. Hiervon sind, wenn $r = 1{,}04$ geseszt wird, die Werthe für num. 2 $= 24{,}9967$, für num. 3 $= 24{,}5129$ und für num. 4 $= 24{,}5098$. Soll einer von den im gegenwärtigen §. angegebenen Kapitalwerthen als Grundkapital angesehen werden, so kann es nur in so weit geschahen, als ein solches Kapital in $\frac{1}{n}$ Theil des Jahrs, wie klein auch $\frac{1}{n}$ gesetzt werden mag, $\frac{1}{n}$ als Zinse trägt, und in diesem Sinne wird $\pi = \frac{1}{\text{log. nat. } r}$ künftig als Grundkapital betrachtet werden.

§. 34.

Hiernach findet man auch den Werth einer Jahrrente 1, die eine bestimmte Zeit in augenblicklichen Terminen bezahlt werden soll, nach dem Zinsfuſse $r - 1$. Da nämlich die baaren Werthe der Renten, für die nämliche Zeit und nach demselben Zinsfuſse berechnet, sich verhalten wie die Renten selbst, so ist der Werth der in augenblicklichen Terminen auf x Jahre zu zahlenden Rente.

1) wenn die Rente für $\frac{1}{n}$ des Jahrs, als einen augenblicklichen Termin, $= \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1}$, und die Zwischenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs $= r^{\frac{m}{n}} - 1$ gesetzt wird, $= p\,(1 - \frac{1}{r^x}) = \int \frac{1}{r^x}$.

2) wenn die Rente wieder für $\frac{1}{n}$ des Jahrs zu $\frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1}$, die Zwischenzinze für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber $= \frac{m}{n} . \overline{r - 1}$ genommen wird, so ist, $n = \infty$ gesetzt, der gesuchte Werth $= \frac{r + 1}{2} \frac{p^2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{r^x}\right) = \frac{(r + 1)}{2} \frac{p}{\pi} \int \frac{1}{r^x}$.

3) wenn man nach num. 3 im vorhergehenden §. die augenblickliche Rente $= \frac{1}{n}$, und die Zwi-

schenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs $= r^{\frac{m}{n}} - 1$ setzt, so wird der baare Werth der auf x Jahre zu zahlenden Rente $= \frac{1}{\log.\ nat.\ r}(1 - \frac{1}{r^x}) = \pi(1 - \frac{1}{r^x})$ $= \frac{\pi}{p}\int\frac{1}{r^x}$.

4) wenn nach num. 4 im vorhergehenden §. die augenblickliche Rente wieder zu $\frac{1}{n}$, die Zwischenzinse für $\frac{m}{n}$ des Jahrs aber zu $\frac{m}{n}.\overline{r-1}$ angenommen wird, so ist der gesuchte Werth dieser Rente auf x Jahre $= \frac{r+1}{2}p(1 - \frac{1}{r^x}) = \frac{r+1}{2}\int\frac{1}{r^x}$.

Drittes Kapitel.

Von veränderlichen Zeitrenten.

---

§. 35.

Eine Zeitrente kann nach mancherley Verhältnissen entweder zunehmen oder abnehmen. Von diesen manchen Verhältnissen werden hier nur diejenigen betrachtet werden, wo die Renten der nach

einander folgenden Jahre entweder eine geometrische oder arithmetische Reihe ausmachen, oder auch nach den Potenzen der natürlichen Zahlen fortgehen, da andre Bestimmungen, wenn gleich denkbar, doch nicht gewöhnlich sind.

§. 36.

Wenn die Zeitrenten in einer *geometrischen Reihe* fortschreiten, wenn die Rente des ersten Jahrs $= 1$, der Exponent der Reihe $= a$, der Zinsfuſs $= r - 1$ und die Zahl der Jahre $= n$ ist, so ist die Reihe der Jahrrenten $= 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$, und wenn jede Jahrrente auf den Anfangstermin discontirt wird, so erhält man den gegenwärtigen Werth der Zahlungen oder $V = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a^2}{r^3} + \ldots$

$$+ \frac{a^{n-1}}{r^n} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{a^{n-1}}{r^{n-1}}\right).$$

Da nun hier $\frac{a}{r}$ der Exponent der Reihe ist, so hat man

$$V = \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{a^n}{r^n} - 1}{\frac{a}{r} - 1}$$

$$= \frac{\frac{a^n}{r^n} - 1}{a - r}.$$

Wäre $a < r$, so wird in diesem Ausdrucke sowohl der Zähler als Nenner verneint, und man kann den Werth dann auch ausdrucken durch

$$V = \frac{1 - \frac{a^n}{r^n}}{r - a}.$$

Wäre aber $a = r$, so erhielte man, anstatt des gesuchten Werthes, $V = \frac{0}{0}$, woraus sich kein bestimmter Werth der Rente ergiebt. In diesem Falle findet man aber, da jedes Glied der Reihe $= 1$ ist, den Werth ohne weitere Rechnung $= n$.

Ex. Es sey $a = 1{,}06$, $r = 1{,}05$, $n = 20$, so

ist $V = \dfrac{\left(\frac{1{,}06}{1{,}05}\right)^{20} - 1}{1{,}06 - 1{,}05} = \dfrac{\frac{5{,}2071}{2{,}6533} - 1}{0{,}01} = \dfrac{1{,}2087 - 1}{0{,}01}$

$= 20{,}87$.

§. 37.

Sollten die Jahrrenten in einer *arithmetischen Reihe* fortschreiten, und zwar zuerst nach der *Ordnung der natürlichen Zahlen* von 1 an *zunehmen*, so wird, wenn jedes mten Jahrs Rente durch die Division mit r^m auf den Anfangstermin discontirt wird, der Werth, oder die Summe dieser discontirten Renten, welche künftig mit $\int \frac{n}{r^n}$ bezeichnet werden soll, $= \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \frac{4}{r^4} + \ldots + \frac{n}{r^n}$. Also ist $(r - 1) \int \frac{n}{r^n}$

$$= 1 + \frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + \frac{4}{r^3} + \cdots + \frac{n}{r^{n-1}}$$

$$- \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} - \cdots - \frac{n-1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n}.$$

Durch Addition beider Reihen erhält man also

$$(r-1)\int\frac{n}{r^n} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n} = 1 + \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n},$$ folglich

$$\int\frac{n}{r^n} = \frac{r}{r-1}\left(1 + \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n}\right)$$

$$= p\left(1 + \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n}\right).$$

Da ferner $1 + \int\frac{1}{r^{n-1}} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} = r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) = r\int\frac{1}{r^n}$, so könnte man auch den Werth von $\int\frac{n}{r^n}$ durch $p\left(r\int\frac{1}{r^n} - \frac{n}{r^n}\right)$ ausdrucken; dies ist jedoch für die Anwendung weniger bequem, da, wenn man den Werth von $\int\frac{1}{r^n}$ aus den Tabellen nimmt, man erst wieder mit r multipliciren muſs, wogegen man, wenn man $\int\frac{1}{r^{n-1}}$ aufsucht, sofort ohne weitere Rechnung 1 hinzulegen kann.

Ex. Wenn die Rente mit 1 anfängt, $n = 20$,

$r = 1{,}04$, also $p = 25$ ist, so hat man $\int \frac{n}{r^n} =$

$25\left(1 + \int \frac{1}{r^{19}} - \frac{20}{r^{20}}\right) = 25\ (1 + 13{,}133939 -$

$20 \cdot 0{,}456387) = 25\ (14{,}133939 - 9{,}12774) =$

$125{,}1549$.

Anm. Es liefse sich der angeführte Satz auch noch auf einem andern Wege herleiten. Man kann nämlich jeden einzelnem der n Rententhaler als die Zinse eines Grundkapitals $= p$ ansehen, wovon dem Rentennehmer im Anfange jedes Jahrs eins bezahlt wird und welche Grundkapitale alle von ihm am Ende des nten Jahrs zurückgegeben werden. Der Werth der gesuchten Rente ist also gleich dem Werthe der n Grundkapitale, wovon eins im Anfange des ersten, eins im Anfange des 2ten, eins im Anfange des 3ten Jahrs etc. fällig ist, weniger dem Werthe aller Grundkapitale, auf n Jahre discontirt, folglich $V = p\ (1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots \frac{1}{r^{n-1}}) - \frac{np}{r^n} = p\ (1 + \int \frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n})$ wie vorher.

§. 38.

Sollte ferner eine Rente im ersten Jahre mit b anfangen und jedes Jahr bis zum Ablauf des nten nach der *Ordnung der natürlichen Zahlen abnehmen*, so setze man der Gleichförmigkeit wegen $b + 1 = a$ und bezeichne diese Rente mit $\int \frac{a-n}{r^n}$, wo a unveränderlich, n aber veränderlich ist. Nun ist

$$\int \frac{a-n}{r^n} = \frac{a-1}{r} + \frac{a-2}{r^2} + \ldots + \frac{a-n}{r^n} =$$

$\frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n} - \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} - \ldots - \frac{n}{r^n} =$

$a\int\frac{1}{r^n} - \int\frac{n}{r^n}$, wonach man diese Reihe auf die im vorhergehenden §. angeführte Formel bringen kann.

Außerdem hat man aber auch $(r-1)\int\frac{a-n}{r^n}$

$$= \frac{a-1}{r^0} + \frac{a-2}{r^1} + \frac{a-3}{r^2} + \ldots + \frac{a-n}{r^{n-1}}$$
$$- \frac{a-1}{r^1} - \frac{a-2}{r^2} - \ldots - \frac{a-n+1}{r^{n-1}} - \frac{a-n}{r^n}.$$

Durch die Addition beider Reihen erhält man also $(r-1)\int\frac{a-n}{r^n} = a - 1 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) - \frac{a-n}{r^n} = a - 1 - \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{a-n}{r^n}$, folglich $\int\frac{a-n}{r^n} = p\left(a - 1 - \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{a-n}{r^n}\right) = pa - pr\left(\int\frac{1}{r^n} + \frac{a-n}{r^{n+1}}\right)$.

Wenn die Rente solange fortdauren soll, bis $n = a$ wird, so ist das letzte Glied in der obigen Formel oder $\frac{a-n}{r^n} = 0$, und für diesen Fall hat man den gesuchten Werth $= pa - pr\int\frac{1}{r^n}$ oder, wenn man b wieder substituiren wollte, $\int\frac{b+1-n}{r^n} = pb + p - pr\int\frac{1}{r^{b+1}} = pb - p\int\frac{1}{r^b}$.

Ex. Es werde bey einer Anleihe, für einen bestimmten Einschufs, eine Prämie von 150 Rthlr. solchergestalt bewilligt, dafs sie in den nächsten 35 Jahren jedesmal mit $\frac{1}{35}$ bezahlt, und der rückständige Theil jährlich mit 2 Procent verzinset werden solle; man sucht den Werth der Prämie nach dem Zinsfufse zu 4 Procent. Das Kapital der Prämie kann als eine Annuität angesehen werden, die in 35 Jahren jedesmal mit $\frac{150}{35} = \frac{30}{7}$ Rthlr. bezahlt werden soll, und davon ist der Werth nach dem Zinsfufse von 4 Procent $= \frac{30}{7} \int \frac{1}{(1{,}04)^{35}} = \frac{30}{7}\, 18{,}6646 =$ 79,9912.

Da an Zinsen das erste mal $35 \cdot \frac{30}{7} \cdot \frac{2}{100} = 35 \cdot \frac{6}{70}$, das zweitemal $34 \cdot \frac{6}{70}$, das drittemal $33 \cdot \frac{6}{70}$ etc. bezahlt werden sollen, so ist der baare Werth der Zinsen, ebenfalls zu 4 Procent berechnet, $= \frac{6}{70}\, p \left(b - \int \frac{1}{r^b}\right) = \frac{6}{70}$ $25\,(35 - 18{,}6646) =$ 35,0044.

Beides zusammen giebt 114,9956, als den baaren Werth der Prämie.

Anm. 1. Eine ähnliche Prämie gab die dänische Regierung bey einer Anleihe im Jahre 1785. Es ward jedoch dabey bestimmt, dafs die Prämie von 150 Rthlr. während der 35 Jahre mit einer gleichen Rente nach dem 2 Procentfufse verzinset und abgetragen werden sollte. Nun hat man nach dem Zinsfufse von 2 Procent für eine Mise von 24,9986 eine Jahrrente von 1 Rthlr. auf 35 Jahre, und folglich für 150 Rthlr. Kapital eine jährliche Rente von

6,0003 oder beinahe 6 Rthlr auf die nämliche Zeit. Der baare Werth dieser Rente nach dem Zinsfuſse von 4 Procent ist aber = 6. 18,6646 = 111,9876 Rthlr., also etwas weniger als im vorhergehenden Falle. Ich führe dies an, um zugleich auf den Unterschied der beiden Fälle aufmerksam zu machen, in deren einem jedes Jahr ein gleicher Theil des Kapitals, in dem andern aber jedesmal eine gleiche Rente zur Verzinsung und zum Abtrag bezahlt wird.

Anm. 2. Auch den im gegenwärtigen §. vorgetragenen Satz kann man noch auf eine andre Art darthun. Man kann nämlich, wenn die Anzahl der Rententhaler im Anfange = n ist, diese n Rententhaler als Zinsen von n Grundkapitalen ansehen, die dem Rentenempfänger im Anfange des ersten Jahrs dargeliehen werden, von welchen Grundkapitalen jedoch eins am Ende jedes Jahrs zurückbezahlt werden muſs. Der Werth dieser Renten wird daher $= n\,p - p\,(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}) = p - p \int \frac{1}{r^n}$. Die hier angeführte Formel ist übrigens ein besonderer Ausdruck für die weiterhin vorkommende Formel für $\int \frac{(a-n)^m}{r^n}$.

§. 39.

Wenn die Renten der verschiedenen Jahre *nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen* von 1 an fortgehen, d. h. wenn im ersten Jahre 1^2, im zweiten 2^2, im dritten 3^2 etc. oder im ersen Jahre 1^3, im zweiten 2^3, im dritten 3^3 etc., überhaupt im ersten Jahre 1^m, im zweiten 2^m, im dritten 3^m etc. bezahlt werden soll, und der gegen-

wärtige Werth dieser Rente mit $\int \frac{n^m}{r^n}$ bezeichnet wird, so ist $\int \frac{n^m}{r^n} = \frac{1^m}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + \dots + \frac{n^m}{r^n}$. Nun ist $(r-1)\int \frac{n^m}{r^n}$

$$= \frac{1^m}{r^0} + \frac{2^m}{r} + \frac{3^m}{r^2} + \frac{4^m}{r^3} + \dots + \frac{n^m}{r^{n-1}}$$

$$- \frac{1^m}{r} - \frac{2^m}{r^2} - \frac{3^m}{r^3} - \dots - \frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} - \frac{n^m}{r^n}.$$

Durch Addition beider Reihen erhält man $(r-1)$

$$\int \frac{n^m}{r^n} = 1 + \frac{(1+1)^m - 1}{r} + \frac{(2+1)^m - 2^m}{r^2} + \frac{(3+1)^m - 3^m}{r^3} + \dots + \frac{(n-1+1)^m - (n-1)^m}{r^{n-1}} - \frac{n^m}{r^n}.$$

Entwickelt man ferner jedes Glied binomisch, so hat man

$$\begin{array}{lll}
1 & = 1 & \\
+ \frac{(1+1)^m - 1^m}{r} & = \frac{m}{1}\frac{1^{m-1}}{r} & + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\frac{1^{m-2}}{r} \\
+ \frac{(2+1)^m - 2^m}{r^2} & = \frac{m}{1}\frac{2^{m-1}}{r^2} & + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\frac{2^{m-2}}{r^2} \\
+ \frac{(3+1)^m - 3^m}{r^3} & = \frac{m}{1}\frac{3^{m-1}}{r^3} & + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\frac{3^{m-2}}{r^3} \\
+ & = + & + \\
+ & = + & + \\
+ \frac{(n-1+1)^m - (n-1)^m}{r^{n-1}} & = \frac{m}{1}\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}} & + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\frac{(n-1)^{m-2}}{r^{n-1}} \\
- \frac{n^m}{r^n} & = &
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}\frac{1^{m-3}}{r}+..+\frac{m.\overline{m-1}..1}{1.2..m}\frac{1}{r} \\
+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}\frac{2^{m-3}}{r^2}+..+\frac{m.\overline{m-1}..1}{1.2..m}\frac{1}{r^2} \\
+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}\frac{3^{m-3}}{r^3}+..+\frac{m.\overline{m-1}..1}{1.2..m}\frac{1}{r^3} \\
+ \qquad\qquad\qquad\qquad +..+ \\
+ \qquad\qquad\qquad\qquad +..+ \\
+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}\frac{(n-1)^{m-3}}{r^{n-1}}+..+\frac{m.\overline{m-1}..1}{1.2..m}\frac{1}{r^{n-1}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{n^m}{r^n}.
\end{array}\right.$$

Danach ergiebt sich also aus der Addition der verticalen Reihen $(r-1)\int\frac{n^m}{r^n} =$

$$1+\frac{m}{1}\int\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}}+\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}\int\frac{(n-1)^{m-2}}{r^{n-1}}+$$

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}\int\frac{(n-1)^{m-3}}{r^{n-1}}+..+\int\frac{1}{r^{n-1}}$$

$-\frac{n^m}{r^n}$, und $\int\frac{n^m}{r^n}=\frac{1}{r-1}\Big(1+m\int\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}}$

$$+\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}\int\frac{(n-1)^{m-2}}{r^{n-1}}+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}$$

$$\int\frac{(n-1)^{m-3}}{r^{n-1}}+..+\int\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{n^m}{r^n}\Big).$$

Da die Potenz vom Grade m, $m+1$ Glieder hat, so hat jede der oben entwickelten horizontalen Reihen m Glieder. Im mten Gliede wird der Ex-

ponent $= m - m = 0$, folglich die auf die Potenz erhobene Gröſse $= 1$, auch wird der Coefficient dieses Gliedes $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot \cdot 1}{1 \, 2 \cdot \cdot m} = 1$; daher ist die Summe dieser mten Glieder $= \int \frac{1}{r^n - 1}$.
Die Glieder nach dem mten in jeder der entwickelten horizontalen Reihen haben den Factor $m - m = 0$, also bricht die Formel mit dem mten Gliede [die beiden äuſsersten, nämlich das erste $= 1$ und das letzte $= \frac{n^m}{r^n}$, ungerechnet] ab.

Wie leicht indessen diese Formel zu übersehen ist, so wird sie doch bey Substitution dadurch etwas unbequem, daſs die Summen von $\frac{n^z}{r^n}$ durch Summen von $\frac{(n-1)^z}{r^n - 1}$ ausgedruckt sind. Man kann indeſsen den obigen Ausdruck leicht in einen andern verwandeln, worin alle Glieder Summen von $\frac{n^z}{r^n}$ sind. Es ist nämlich nach der angegebenen Formel
$$\int \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} = p\Big(1 + \frac{m}{1} \int \frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} \int \frac{n^{m-2}}{r^n} + \frac{m \cdot \overline{m-1} \, \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \frac{n^{m-3}}{r^3} + \cdot \cdot - \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}}\Big).$$
Nun ist aber $\int \frac{n^m}{r^n} = \int \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} -$

$$\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} = p\left(1 + \frac{m}{1}\int\frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{1\,.\,2}\int\frac{n^{m-2}}{r^n} + \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2\,.\,3}\int\frac{n^{m-3}}{r^n} + \,..\right)$$

$$- p\,\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}}.$$ Die beiden letzten verneinten Glieder sind zusammengenommen $= (p+1)\,\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} = pr\,\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} = p\,\frac{(n+1)^m}{r^n}$. Folglich wird

$$\int\frac{n^m}{r^n} = p\left(1 + m\int\frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m\,.\,\overline{m-1}}{1\,.\,2}\int\frac{n^{m-2}}{r^n} + \frac{m\,.\,\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2\,.\,3}\int\frac{n^{m-3}}{r^n} + \,.\,. + \int\frac{1}{r^n} - \frac{(n+1)^m}{r^n}\right).$$

Setzt man nun nach und nach $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ etc., so erhält man die Summe der discontirten nach den Potenzen vom Grade 1, 2, 3 etc. der naturlichen Zahlen steigenden Renten.

Es sey also $m = 1$, so ist $\int\frac{n}{r^n} = p\left(1 + \int\frac{(n-1)^0}{r^{n-1}} - \frac{n^1}{r^n}\right) = p\left(1 + \int\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n}{r^n}\right)$, wie vorher im §. 37, oder auch $\int\frac{n}{r^n} = p\left(1 + 1\int\frac{n^0}{r^n} - \frac{(n+1)^1}{r^n}\right) = p\,(1 +$

$$\int \frac{1}{r^n} - \frac{n+1}{r^n}) = p\,(1 + p - \frac{n+1+p}{r^n}).$$

Für m = 2 erhielte man nach der zuletzt angegebenen Formel $\int \frac{n^2}{r^n} = p\,(1 + 2\int \frac{n}{r^n} + \int \frac{1}{r^n} - \frac{(n+1)^2}{r^n})$, und durch Substituirung

$$\int \frac{n^2}{r^n} = p\,(1 + 3\,p + 2\,p^2 - \frac{n^2 + 2\,n\,(1+p) + 1 + 3\,p + 2\,p^2}{r^n}). \text{ etc.}$$

Ex. Es sey n = 2, m = 2, r = 1,04, also p = 25, so wird $\int \frac{n^m}{r^n} =$

25. [1 + 3. 25 + 2. 625 — (4 + 4. 26 + 1 + 75 + 1250). 09245562] = 33150 — 33145,3402 = 4,6597.

Auch findet man durch die gewöhnliche Berechnung

$\frac{1}{r} =$ 0,961538.

$\frac{2^2}{r^2} =$ 4.0,9245562 = 3,698224

folglich zusammen = 4,659762.

Anm. Tetens führt in seiner Anleitung zur Berechnung der Leibrenten etc. Seite 54 eine andre Formel für $\int \frac{n^m}{r^n}$

so, nämlich $\int \frac{n^m}{r^n} = p \cdot (r \int \frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m-1}{1} \int \frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2} \int \frac{n^{m-2}}{r^n} + \ldots + \frac{m-1 \,.\, m-2 \ldots 1}{1 \,.\, 2 \ldots m-1} \int \frac{n}{r^n} - \frac{n(n+1)^{m-1}}{r^n})$. Der Beweis dafür ist aber ziemlich weitläufig, und die Formel nicht so leicht zu übersehen als die vorher angeführte.

§. 40.

Aus den im vorigen §. angeführten Ausdrücken sieht man, daſs die Formel für $\int \frac{n^m}{r^n}$, wenn man anstatt der höhern Potenzen die niedern und zuletzt anstatt $\int \frac{1}{r^n}$, $p\,(1 - \frac{1}{r^n}) = p - p\,\frac{1}{r^n}$ setzt, aus zwey Theilen bestehe, einem bejahten und einem verneinten. Der erste enthält, auſser den Coefficienten, lauter Producte von p und dessen Potenzen, und ist von n ganz unabhängig. Der zweite enthält Potenzen und Producte von p und von n. Wie nun bey $\int \frac{1}{r^n} = p - p\,\frac{1}{r^n}$ der erste Theil oder $p = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots$ ins Unendliche, d. h gleich dem Werthe von $\int \frac{1}{r^x}$ ins Unendliche ist

so ist zu erwarten, daſs auch überhaupt in den Ausdrücken für die höhern Potenzen oder in $\int \frac{n^m}{r^n}$ der bejahte Theil, der von n unabhängig ist, dem Werth der unendlichen Reihe $\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3}$ etc. gleich sey. Man kann daher auf diesem Wege das Gesetz suchen, wodurch sowohl der bejahte als verneinte Theil von $\int \frac{n^m}{r^n}$ bestimmt werden.

Es ist nämlich zuerst $\int \frac{1}{r^x}$ ins Unendliche, $= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \sim$ ins Unendliche, und wenn man auf beiden Seiten mit $r - 1$ multiplicirt, so wird $(r-1)\int \frac{1}{r^x} =$

$$\left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \sim \\ - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \sim \end{matrix}\right\},$$ folglich

$(r-1)\int \frac{1}{r^x} = 1$, und $\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1} = p$.

Ferner ist $\int \frac{x}{r^x}$ ins Unendliche $= \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \frac{4}{r^4} + \sim$, also $(r - 1)\int \frac{x}{r^x} =$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + \frac{4}{r^3} + \sim \\ \quad - \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} - \sim \end{array}\right\} \text{ und}$$

$(r-1)\int \frac{x}{r^x} = 1 + \int \frac{1}{r^x} = 1 + p$, folglich

$\int \frac{x}{r^x} = \frac{1+p}{r-1} = p + p^2.$

Eben so ist $\int \frac{x^2}{r^x}$ ins Unendliche $= \frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + \frac{4^2}{r^4} + \sim$, und $(r-1)$

$$\int \frac{x^2}{r^x} = \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{2^2}{r} + \frac{3^2}{r^2} + \frac{4^2}{r^3} + \sim \\ \quad - \frac{1}{r} - \frac{2^2}{r^2} - \frac{3^2}{r^3} - \sim \end{array}\right\}$$

also $(r-1)\int \frac{x^2}{r^x} = 1 + \frac{2^2-1}{r} + \frac{3^2-2^2}{r^2} + \frac{4^2-3^2}{r^3} + \sim = 1 + \frac{2 \cdot 1 + 1}{r} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{r^2} + \frac{2 \cdot 3 + 1}{r^3} + \sim = 1 + \int \frac{1}{r^x} + 2\int \frac{x}{r^x}$
$= 1 + 3p + 2p^2$, und $\int \frac{x^2}{r^x} = \frac{1 + 3p + 2p^2}{r-1}$
$= p + 3p^2 + 2p^3.$

Noch ist $\int \frac{x^3}{r^x}$ ins Unendliche $= \frac{1}{r} + \frac{2^3}{r^2} + \frac{3^3}{r^3} + \frac{4^3}{r^4} + \sim$, und $(r-1)$

$$\int \frac{x^3}{r^x} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2^3}{r} + \frac{3^3}{r^2} + \frac{4^3}{r^3} + \sim \\ - \frac{1}{r} - \frac{2^3}{r^2} - \frac{3^3}{r^3} - \sim \end{array} \right\}$$

oder $(r - 1) \int \frac{x^3}{r^x}$ ins Unendliche $=$

$$1 + \frac{3 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 + 1}{r} + \frac{3 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 + 1}{r^2} + \frac{3 \,.\, 3^2 + 3 \,.\, 3 + 1}{r^3} + \sim = 1 + \int \frac{1}{r^x} + 3 \int \frac{x}{r^x}$$

$$+ 3 \int \frac{x^2}{r^x} = 1 + 7\,p + 12\,p^2 + 6\,p^3,$$ und

$\int \frac{x^3}{r^x}$ ins Unendliche $= \frac{1 + 7\,p + 12\,p^2 + 6\,p^3}{r - 1} =$
$p + 7\,p^2 + 12\,p^3 + 6\,p^4.$

Auf dieselbe Weise läſst sich der Werth jeder Reihe wie $\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + \frac{4^m}{r^4} + \sim$ ins Unendliche finden.

Sucht man aber die Summe bis zu einem bestimmten nten Gliede, so muſs man von der Summe der mit $\frac{1}{r}$ anhebenden unendlichen Reihe $\int \frac{x^m}{r^x}$, die Summe der unendlichen Reihe vom Gliede $\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}}$ an abziehen, wonach der Rest den Werth

der endlichen Reihe von $\frac{1}{r}$ bis $\frac{n^m}{r^n}$ giebt.

Diese abzuziehenden Glieder sind =

$$\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} + \frac{(n+2)^m}{r^{n+2}} + \frac{(n+3)^m}{r^{n+3}} + \sim$$

Es ist aber

$$\frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} = \frac{1}{r^n}\left(n^m \frac{1}{r} + \frac{m}{1} n^{m-1} \frac{1}{r} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} n^{m-2} \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{(n+2)^m}{r^{n+2}} = \frac{1}{r^n}\left(n^m \frac{1}{r^2} + \frac{m}{1} n^{m-1} \frac{2}{r^2} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} n^{m-2} \frac{2^2}{r^2} + \dots + \frac{2^m}{r^2}\right)$$

$$\frac{(n+3)^m}{r^{n+3}} = \frac{1}{r^n}\left(n^m \frac{1}{r^3} + \frac{m}{1} n^{m-1} \frac{3}{r^3} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} n^{m-2} \frac{3^2}{r^3} + \dots + \frac{3^m}{r^3}\right)$$

Nun machen die unter einander stehenden Glieder der entwickelten Potenzen wieder under sich eine Reihe von der Form $C\int \frac{x^m}{r^x}$ aus, wo C der gemeinschaftliche Coefficient ist, und da jede dieser Reihen ins Unendliche fortgeht, so ist die Summe aller Reihen zusammengenommen $= \frac{1}{r^n}\left(n^m \int \frac{1}{r^x}\right.$

$$+\frac{m}{1}n^{m-1}\int\frac{x}{r^x}+\frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot 2}n^{m-2}\int\frac{x^2}{r^x}+\ldots$$
$$+\int\frac{x^m}{r^x}).$$

Folglich erhält man die gesuchte Summe der ersten n Glieder von $\int\frac{x^m}{r^x}$, d. h. $\int\frac{n^m}{r^n}=$

$$\int\frac{x^m}{r^x}-\frac{1}{r^n}(n^m\int\frac{1}{r^x}+\frac{m}{1}n^{m-1}\int\frac{x}{r^x}+$$
$$\frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot 2}n^{m-2}\int\frac{x^2}{r^x}+\ldots+\int\frac{x^m}{r^x}).$$

Hieraus findet man also den Werth nicht nur des bejahten, sondern auch des verneinten Theils der im vorigen §. angegebenen Formel für $\int\frac{n^m}{r^n}$, und zwar erstern durch p und seine Potenzen allein, letztern aber zugleich durch n und dessen Potenzen ausgedruckt.

Es ist nämlich zuerst, wie schon vorher angeführt, $\int\frac{1}{r^n}=p-p\frac{1}{r^n}$.

Ferner ist $\int\frac{n}{r^n}=\int\frac{x}{r^x}-\frac{1}{r^n}(n\int\frac{1}{r^x}$
$+\int\frac{x}{r^x})=p+p^2-\frac{1}{r^n}(n\,p+p+p^2)$.

Eben so ist $\int \frac{n^2}{r^n} = \int \frac{x^2}{r^x} - \frac{1}{r^n} \left(n^2 \int \frac{1}{r^x} + 2n \int \frac{x}{r^x} + \int \frac{x^2}{r^x}\right) = p + 3p^2 + 2p^3 - \frac{1}{r^n}\left[n^2 p + 2n(p + p^2) + p + 3p^2 + 2p^3\right].$

Noch ist $\int \frac{n^3}{r^n} = \int \frac{x^3}{r^x} - \frac{1}{r^n}\left(n^3 \int \frac{1}{r^x} + 3n^2 \int \frac{x}{r^x} + 3n \int \frac{x^2}{r^x} + \int \frac{x^3}{r^x}\right) =$
$p + 7p^2 + 12p^3 + 6p^4 - \frac{1}{r^n}\left[n^3 p + 3n^2(p + p^2) + 3n(p + 3p^2 + 2p^3) + p + 7p^2 + 12p^3 + 6p^4\right].$

Für die Berechnung ist es jedoch bequemer, wenn man einmal Tabellen für $\int \frac{1}{r^n}$ hat, diesen letztern Ausdruck beizubehalten, welches leicht geschehen kann, wenn man die letzten nicht in n multiplicirten Glieder des verneinten Theils in den angegebenen Ausdrücken mit dem bejahten Theil zusammenfaſst. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\int \frac{n^3}{r^n} = (p + 7p^2 + 12p^3 + 6p^4)\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$$

$- \frac{1}{r^n} \left[n^3 p + 3 n^2 (p + p^2) + 3 n (p + 3 p^2 + 2 p^3) \right] = (1 + 7 p + 12 p^2 + 6 p^3) \int \frac{1}{r^n} - \frac{1}{r^n} \left(n^3 p + 3 n^2 (p + p^2) + 3 n (p + 3 p^2 + 2 p^3 \right)$.

Ex. Es sey $n = 3$, $m = 3$ und $r = 1{,}04$; dann ist $\int \frac{1}{r^x} = 25$, $\int \frac{x}{r^x} = 650$, $\int \frac{x^2}{r^x} = 33150$, und $1 + 7 p + 12 p^2 + 6 p^3 = 101426$, $\int \frac{1}{r^3} = 2{,}775091033$, $\frac{1}{r^3} = 0{,}88899635$. Man erhält also $\int \frac{x^3}{r^3} = 101426 \times 2{,}775091033 - 0{,}888996358 \times (27 \cdot 25 + 27 \cdot 650 + 9 \cdot 33150) = 281466{,}3831 - 281434{,}0222 = 32{,}3609$.

Auf die gewöhnliche Weise findet man

1 × 0,961538 =	0,961538
8 × 0,924556 =	7,396448
27 × 0,888996 =	24,002901
folglich zusammen	32,360887.

Anm. Begreiflich ist die Berechnung nach der angegebenen Formel, wenn man die Decimaltheile mit einiger Genauigkeit haben will, mühsam, und so lange n eine kleine Zahl ist, wird man mit der gewöhnlichen Rechnung früher fertig. Wäre indefsen n bedeutend gröfser als m, so würde die letztere Berechnung, da sie in Multiplicationen erfordert, viel weitläuftiger werden.

Anm. 2. Tetens führt diese Formel auch an, jedoch als

eine von der vorhergehenden verschiedene. Es ergiebt sich aber aus der hier gebrauchten Darstellung, daſs sie lediglich eine weitere Entwickelung der vorigen Formel sey.

§. 41.

Wenn die Rente in *augenblicklichen Terminen* bezahlt, und dabey die im vorigen §. angegebene Bestimmung beibehalten werden soll, daſs die Rente für jedes nte Jahr, und zwar vom Anfange deſselben an, nach Potenzen der natürlichen Zahlen steigt, so daſs also die Anzahl der Renteneinheiten, die in den verschiedenen Jahren bezahlt werden, 1, 2^m, 3^m etc., überhaupt im nten Jahre n^m ist, so ist die Anzahl der jedes Jahr zu zahlenden Rententhaler so groſs als im vorigen §. angegeben worden, und wenn sie nach dem nämlichen Fundamentalzinsfuſse wie vorher berechnet werden, so verhält sich der discontirte Werth jedes einzelnen im Laufe des nten Jahrs zu zahlenden Rententhalers zu dem discontirten Werthe eines andern am Ende desselben Jahrs fälligen Rententhalers wie

$\frac{1}{\log.\ nat.\ r} : \frac{1}{r-1}$ oder wie $\pi : p$. Folglich verhält sich auch der baare Werth aller in augenblicklichen Terminen zahlbaren Renten zusammengenommen zu dem baaren Werthe der nämlichen am Ende jedes Jahrs fälligen Renten wie $\pi : p$, und es wird daher der gegenwärtige Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren, jährlich nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen steigenden, Renten ==

$$\frac{1}{\log.\,nat.\,r}\left(1+m\int\frac{n^{m-1}}{r^n}+\frac{m.\,m-1}{1.\,2}\int\frac{n^{m-2}}{r^n}+\ldots-\frac{(n+1)^m}{r^n}\right).$$

§. 42

Soll aber die Rente nicht bloſs in augenblicklichen gleichen Terminen bezahlt werden, sondern zugleich *augenblicklich nach gleichnahmigen Potenzen der verfloſsenen Zeit x steigen*, so ist der augenblickliche Theil der jährlichen Rente $1 = dx$, die Anzahl der Rententhaler, die in dem xten Zeittheile gegeben werden sollen, $= x^m$, also der derzeitige Werth der augenblicklichen Zahlung $= x^m\,dx$, der discontirte Werth derselben Zahlung $= \frac{x^m\,dx}{r^x}$, und der baare Werth sämtlicher Zahlungen bis zu Ablauf der Zeit $x = \int\frac{x^m\,dx}{r^x}$.

Setzt man nun $\frac{1}{r} = q$, also $\frac{1}{r^x} = q^x$, so wird $\frac{x^m\,dx}{r^x} = q^x\,x^m\,dx$. Es ist aber $d.(q^x\,.\,x^m) = q^x\,.\,m\,x^{m-1}\,dx + x^m\,.\,q^x\,.\,dx\,\log.\,nat.\,q$, folglich $q^x\;x^m\;dx = \frac{d\,(q^x\;x^m) - q^x\,m\,x^{m-1}\,dx}{\log.\,nat.\,q}$ und

$$\int q^x\;x^m\;dx = \frac{q^x\;x^m}{l.\,q} - m\int\frac{q^x\;x^{m-1}\,dx}{l.\,q},$$

also auch $\int \frac{x^m\,dx}{r^x} = \frac{x^m}{r^x\ l.\ q} - m \int \frac{x^{m-1}\,d}{r^x\ .\ l.}$

oder, da $l.\ q = l.\ \frac{1}{r} = -\ l.\ r$, $\int \frac{x^m\,dx}{r^x}$

$= m \int \frac{x^{m-1}\,dx}{r^x\ .\ l.\ r} - \frac{x^m}{r^x\ .\ l.\ r}$.

Man setze nun der Bequemlichkeit weg

$\frac{1}{\log.\ nat.\ r} = \pi$, so ist $\int \frac{x^m\,dx}{r^x} =$

$m\ \pi \int \frac{x^{m-1}\,dx}{r^x} - \pi\ \frac{x^m}{r^x}$; ferner eben dah

$m\,\pi \int \frac{x^{m-1}\,dx}{r^x} = m\ .\ \overline{m-1}\ \pi^2 \int \frac{x^{m-2}\,d}{r^x}$

$-\ m\ \frac{\pi^2\ x^{m-1}}{r^x}$, imgleichen $m\ .\ \overline{m-1}\ \pi^2 \int \frac{x^{m-2}\,d}{r^x}$

$= m\ .\ \overline{m-1}\ .\ \overline{m-2}\ \pi^3 \int \frac{x^{m-3}\,d}{r^x}$

$-\ m\ .\ \overline{m-1}\ \pi^3\ \frac{x^{m-2}}{r^n}$ etc. und

$m\ .\ \overline{m-1}\ .\ \overline{m-2}\ .\ .\ 2\ .\ \pi^{m-1} \int \frac{x\,d}{}$

$= m\ .\ \overline{m-1}\ .\ .\ 1\ .\ \pi^m \int \frac{dx}{r^x}$ —

$m\ .\ \overline{m-1}\ .\ .\ 2\ .\ \pi^m\ \frac{x}{r^x}$. Endlich ist

$m\ \overline{m-1}\ .\ .\ 1\ .\ \pi^m \int \frac{dx}{r^x} = -$

$m . \overline{m-1} . . 1 \; \pi^{m+1} \frac{1}{r^x}$, folglich wird $\int \frac{x^m \, dx}{r^x} =$
$-\frac{1}{r^x} (x^m \pi + m \, x^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1} \, x^{m-2} \pi^3 + . .$
$+ m . \overline{m-1} . . 1 . \pi^{m+1}) + C$, und da das Integral für $x = 0$ verschwindet, so ist die Constante $= m . \overline{m-1} . . 1 . \pi^{m+1}$.

Also wird das vollständige Integral $\int \frac{x^m \, dx}{r^x}$
$= m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . . 1 . \pi^{m+1} -$
$\frac{1}{r^x} (x^m \pi + m \, x^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1} \, x^{m-2} \pi^3 + . .$
$+ m . \overline{m-1} \; \overline{m-2} . . 1 . \pi^{m+1})$, oder auch, wenn man den letzten verneinten Theil mit dem bejahten zusammenfaſst, $\int \frac{x^m \, dx}{r^x} =$
$m . \overline{m-1} . . 1 . \pi^{m+1} (1 - \frac{1}{r^x}) - \frac{1}{r^x} (x^m \pi +$
$m \, x^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1} \, x^{m-2} \pi^3 + . . +$
$\overline{m . m-1} . . 2 . x \, \pi^m)$.

Ex. Es sey $x = 3$, $m = 2$, $r = 1{,}04$, so ist $\pi = 25{,}4967317$ . ., $\pi^2 = 650{,}0833265$. Der gegenwärtige Werth der Rente ist hienach $= 2\pi^3 -$
$\frac{1}{r^3} (9\pi + 6\pi^2 + 2\pi^3) = \pi \, [2\pi^2 - \frac{1}{r^3} (9 +$
$6\pi + 2\pi^2)] = 25{,}4967317 \; [2 \times 650{,}0833265 -$
$0{,}8889964 \; (9 + 152{,}980390 + 1300{,}166653)] =$
$8{,}2405$.

Wäre wieder $r = 1{,}04$, aber $x = 1$ und $m = 1$, so würde der Werth der Rente $= \pi^2 - \frac{1}{r}(\pi + \pi^2) = 0{,}4871167$.

Anm. 1. Uebrigens sind die Summen der Renten, so wi sie in dem gegenwärtigen §. bestimmt worden, von denen, welche im nächstvorhergehenden §. angegeben sind, verschieden Im vorhergehenden §. wurde nämlich vorausgesetzt, daſs die Rente, deren Theile im augenblicklichen Terminen bezahlt werden vom Anfange des ersten Jahrs an und während des ganzen erste Jahrs $= 1$, vom Anfange und während des ganzen zweiten Jahr $= 2^m$, so wie vom Anfange und während des ganzen nten Jahr $= n^m$ sey. Im gegenwärtigen §. aber ist angenommen, daſs die Rent continuirlich von o an bis zu 1^m wachse, im zweiten Jahre vo 1^m stetig bis 2^m, so wie überhaupt im nten Jahre von $(n-1)^m$ stetig bis n^m zunehme. Die Summe dieser letzten Renten i daher nothwendig kleiner als die der erstern. Eben daher si auch die Werthe von $\int \frac{x^m\,dx}{r^x}$, wenn auch $x = 1$ geset wird, doch verschieden, je nachdem m anders angenommen wi Die Rente $\int \frac{x^m\,dx}{r^x}$ wächst nämlich vom Anfange des Ja an nach dem Verhältniſse x^m und ist daher verhältniſsmäſsig Anfange des Jahrs um so kleiner, je gröſser m ist. Auch w nach der angegebenen Formel für $x = 1$ und $m = 1$ der We der Rente $= \pi^2 - \frac{1}{r}(\pi + \pi^2) = 0{,}4871167$. Für x 1 und $m = 2$ würde sie $= 2\pi^2 - \frac{1}{r}(\pi + 2\pi^2 + 2$ $= 0{,}5236804$ etc. Im ersten Falle ist der Werth $< \frac{1}{2}$,

zweiten $< \frac{1}{2}$, so wie überhaupt für jeden Werth von m der Werth der Rente des ersten Jahrs $< \frac{1}{m+1}$ ist. Dagegen ist der Werth von $\int \frac{n^m}{r^n}$, wenn $n = 1$ gesetzt wird, immer $= \frac{1}{r}$, wie auch m angenommen werden mag; dies ergiebt sich auch aus der ersten im §. 39 angeführten Formel, die für $n = 1$ den Werth von $\int \frac{n^m}{r^n} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{n}{r^n}\right) = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$ giebt.

Wenn aber $m = 0$ wird, so ist $\int \frac{x^0\, dx}{r^x} = \int \frac{dx}{r^x}$. Nun ist nach dem Vorhergehenden $\int \frac{dx}{r^x} = - \frac{1}{r^x\, l.\, r} + C$, und da das Integral für $x = 0$ verschwindet, so ist $C = \frac{1}{l.\, r}$, also das vollständige Integral $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{l.\, r} - \frac{1}{r^x\, l.\, r} = \frac{1}{l.\, r}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ oder $= \pi\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) = \frac{\pi}{p} \int \frac{1}{r^x}$, wie oben auf einem andern Wege dargethan worden. Daſselbe erhält man auch aus der angegebenen allgemeinen Formel, wenn man erwägt, daſs wegen der zu $\int \frac{dx}{r^x}$ gehörigen Constante der bejahte Theil der allge-

meinen Formel nicht 0 als Factor haben kann, folglich die Formel für $\int \frac{x^0 \, dx}{r^x}$ den Werth $= \pi - \frac{1}{r^x} x^0 \pi = \pi - \frac{\pi}{r^x}$ giebt.

Anm. 2. Würden gar keine Zinsen gerechnet, und wäre also $r = 1$, so gäben alle in den §. §. 36 bis 42 angeführten Formeln keinen bestimmten Werth für die Summe der Rente. Man bedarf ihrer aber dann auch nicht, da diese Summen nach leichteren Methoden gefunden werden können. Für die nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen jährlich steigenden Renten hat man nämlich die bekannte Formel $\int n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{m}{2}\int n^{m-1} - \frac{m \,.\, m-1}{2 \,.\, 3}\int n^{m-2} + \ldots$, oder auch $\int n^m = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \left(\frac{m}{2}\int n^{m-1} + \frac{m \,.\, m-1}{2 \,.\, 3}\int n^{m-2} + \ldots + \frac{1}{m+1}\int n^0 + \frac{1}{m+1}\right)$, und da keine Zinsen gerechnet werden sollen, so ist es hier gleichgültig, ob die Renten auf einmal am Ende des Jahrs oder in Terminen bezahlt werden. Für die Summe der augenblicklich nach den gleichnamigen Potenzen der Zeit steigenden Renten hat man den Werth oder $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ woraus das Gesuchte sofort gefunden wird.

§. 43.

Sollte eine Rente *nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen* in umgekehrter Ordnung so

abnehmen, daſs sie am Ende des ersten Jahrs mit $(a-1)^m$, am Ende des zweiten Jahrs mit $(a-2)^m$; so wie überhaupt am Ende des nten Jahrs mit $(a-n)^m$ bezahlt würde, so ist ihr gegenwärtiger Werth oder $V = \frac{(a-1)^m}{r} + \frac{(a-2)^m}{r^2} + \frac{(a-3)^m}{r^3} + \ldots + \frac{(a-n)^m}{r^n}$, welche Summe mit $\int \frac{(a-n)^m}{r^n}$ bezeichnet werden kann. Nun ist $a^m + \int \frac{(a-n)^m}{r^n} = a^m + \frac{(a-1)^m}{r} + \frac{(a-2)^m}{r^2} + \ldots + \frac{(a-n)^m}{r^n}$; also $(1 - \frac{1}{r})\,(a^m + \int \frac{(a-n)^m}{r^n}) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^m}{r^0} + \frac{(a-1)^m}{r^1} + \frac{(a-2)^m}{r^2} + \ldots + \frac{(a-n)^m}{r^n} \\ - \frac{a^m}{r} - \frac{(a-1)^m}{r^2} - \ldots - \frac{(a-n+1)^m}{r^n} - \frac{(a-n)^m}{r^{n+1}} \end{array} \right\} = a^m -$$

$$\frac{a^m - (a-1)^m}{r} - \frac{(a-1)^m - (a-2)^m}{r^2} \ldots - \frac{(a-n+1)^m - (a-n)^m}{r^n} - \frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}.$$

Entwickelt man aber in jedem Gliede die Potenz, wovon der Abzug geschehen soll, binomisch, und zwar solchergestalt, daſs man anstatt $a - n$ setzt $\overline{a - n - 1} + 1$, um die entgegengesetzten Gröſsen zu vermeiden, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{lcl}
a^m & = & a^m \\
-\dfrac{a^m - (a-1)^m}{r} & = & -\dfrac{m}{1}\,\dfrac{(a-1)^{m-1}}{r} \\
-\dfrac{(a-1)^m - (a-2)^m}{r^2} & = & -\dfrac{m}{1}\,\dfrac{(a-2)^{m-1}}{r^2} \\
- \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & = & - \quad \cdot \quad \cdot \\
-\dfrac{(a-n+1)^m - (a-n)^m}{r^n} & = & -\dfrac{m}{1}\,\dfrac{(a-n)^{m-1}}{r^n} \\
-\dfrac{(a-n)^m}{r^{n+1}} & = &
\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.2}\,\dfrac{(a-1)^{m-2}}{r} - \ldots - \dfrac{m\,.\,.\,1}{1\,.\,.\,m}\,\dfrac{(a-1)^0}{r} \\
-\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.2}\,\dfrac{(a-2)^{m-2}}{r^2} - \ldots - \dfrac{m\,.\,.\,1}{1\,.\,.\,m}\,\dfrac{(a-2)^0}{r^2} \\
-\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.2}\,\dfrac{(a-n)^{m-2}}{r^n} - \ldots - \dfrac{m\,.\,.\,1}{1\,.\,.\,m}\,\dfrac{(a-n)^0}{r^n} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{(a-n)^m}{r^{n+1}}.
\end{array}\right.$$

Durch Addition der verticalen Reihen erhält man also $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \int a^m + \int \frac{(a-n)^m}{r^n} = \int a^m - \frac{m}{1} \int \frac{(a-n)^{m-1}}{r^n} - \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} \int \frac{(a-n)^{m-2}}{r^n} - \ldots - \int \frac{1}{r^n} - \frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}$. Folglich wird

$$\int\frac{(a-n)^m}{r^n}+a^m=\frac{r}{r-1}\left(a^m-\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{r^n}\right.$$

$$-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{r^n}-\,..\,-\int\frac{1}{r^n}-$$

$$\left.\frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}\right)\text{ und }\int\frac{(a-n)^m}{r^n}=\left(\frac{r}{r-1}-\frac{r-1}{r-1}\right)a^m-$$

$$\frac{r}{r-1}\left(\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{r}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{r^n}\right.$$

$$\left.+\,..\,+\int\frac{1}{r^n}+\frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}\right)=pa^m-$$

$$pr\left(\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{r}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{r^n}+\,..\right.$$

$+\int\frac{1}{r^n}+\frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}\Big)$, wo man n im ganzen Zahlen von 1 an bis a beliebig setzen kann.

Wenn man n bis a fortsetzt, so wird das letzte Glied in dem eingeklammerten Theile oder $\frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}=0$, das vorletzte Glied oder $\int\frac{1}{r^n}$ aber $=\int\frac{1}{r^a}$; also kann man für diesen Fall die Formel auch ausdrucken durch pa^m-

$$pr\left(m\int\frac{(a-n)^{m-1}}{r^n}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{r^n}\right.$$

$$\left.+\,..\,+m\int\frac{(a-n)^1}{r^n}+\int\frac{1}{r^a}\right).$$

Sollte die Rente im ersten Jahre mit b, im

zweiten mit $\overline{b - 1}$, im dritten mit $\overline{b - 2}$ etc. bezahlt werden bis sie auf 0 abnimmt, so kann man in der angegebenen Formel anstatt a setzen b + 1, und man erhält dann den Werth der Summe =

$$p(b + 1)^m - pr\left(m \int \frac{(b + 1 - n)^{m-1}}{r^n}\right.$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \int \frac{(b + 1 - n)^{m-2}}{r^n} + \ldots$$

$$\left. + m \int \frac{(b + 1 - n)^{m-2}}{r^n} + \int \frac{1}{r^{b+1}}\right),$$ wo dann n bis zu b + 1 zunimmt. Sonst könnte man die Formel für diesen letzten Fall auch noch anders ausdrucken. Es ist nämlich der gegenwärtige Werth der Rente des ersten Jahrs $= \frac{b^m}{r}$, und der Renten der übrigen Jahre zusammengenommen, da sie um 1 Jahre später zahlbar werden, als wenn die Rente gleich im ersten Jahre mit b — 1 bezahlt würde, $= \frac{1}{r} p\left(b^m - r\left(m \int \frac{(b - n)^{m-1}}{r^n}\right.\right.$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \int \frac{(b - n)^{m-2}}{r^n} + \ldots + m \int \frac{(b - n)^1}{r^n} +$$

$$\left.\left.\int \frac{1}{r^b}\right)\right),$$ folglich wird der gesammte Werth =

$$\frac{b^m}{r} + \frac{1}{r} pb^m - p\left(m \int \frac{(b - n)^{m-1}}{r^n}\right.$$

$$+ \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} \int \frac{(b-n)^{m-2}}{r^n} + \ldots + m \int \frac{(b-n)^1}{r^n} +$$

$$\int \frac{1}{r^b}) = pbm - p\,(m \int \frac{(b-n)^{m-1}}{r^n} +$$

$$\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} \int \frac{(b-n)^{m-2}}{r^n} + \ldots + m \int \frac{(b-n)^1}{r^n}$$

$+ \int \frac{1}{r^b})$, wo n bis zu b wächst.

Ex. Wenn die Rente mit b anfängt, auch bis o abnehmen soll, und $m = 1$ ist, so erhält man nach der ersten der zuletzt angeführten zwey Formeln

$$\int \frac{(b+1-n)}{r^n} = p\,(b+1-r \int \frac{1}{r^{b+1}} = p(b+$$

$1 - 1 - \int \frac{1}{r^b}) = p\,(b - \int \frac{1}{r^b})$. Die zweite giesst unmittelbar $\int \frac{(b+1-n)}{r^n} =$

$p\,(b - \int \frac{r'}{r^b})$, übereinstimmend mit dem schon im §. 38 angegebenen Werthe.

§. 44. a.

Wenn eine Rente, so wie sie im vorigen §. angegeben ist, nicht am Ende jedes Jahrs, sondern in augenblicklichen Terminen während desselben bezahlt werden sollte, so verhielte sich ihr baarer Werth, da, die Zwischenzinsen abgerechnet, jedes Jahr die

die nämlichen Zahlungen wie vorher zu leisten wären, zu dem Werthe der vorhin angegebenen Rente, wie $\pi : p$, folglich wäre dieser Werth $=$

$$\frac{\pi}{p}\int\frac{(a-n)^m}{r^n} = \pi a^m - \pi r \Big(m\int\frac{(a-n)^{m-1}}{r^n}$$

$$+ \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{r^n} + \ldots + \int\frac{1}{r^n}$$

$$+ \frac{(a-n)^m}{r^{n+1}}\Big).$$

§. 44. b.

Sollten aber die Renten nicht nur in augenblicklichen Terminen bezahlt werden, sondern zugleich in diesen augenblicklichen Terminen nach gleichnamigen Potenzen von $a - x$, wo x die abgelaufene Zeit bezeichnet, stetig abnehmen, so dafs die Rente im ersten Augenblick $= a^m$, am Ende des ersten Jahrs $= (a-1)^m$, am Ende des zweiten Jahrs $= (a-2)^m$, so wie überhaupt am Ende des nten Jahrs $= (a-n)^m$ wäre, so ist der baare Werth dieser Rente $= \int\frac{(a-x)^m dx}{r^x}$. Man setze $a - x = z$, so wird $dx = -dz$ und $r^x = r^{a-z} = \frac{r^a}{r^z}$, folglich $\int\frac{(a-x)^m dx}{r^x} =$

$$-\int\frac{z^m dz\, r^z}{r^a},$$ oder wenn man $r = \frac{1}{q}$ setzt,

$\int \frac{(a-x)^m dx}{r^x} = -q^a \int \frac{z^m dz}{q^z}$. Nun ist $\frac{1}{\log.\ nat.\ q} = \frac{1}{\log.\ nat.\ \frac{1}{r}} = -\pi$, folglich wird das Integral $-q^a \int \frac{z^m dz}{q^z}$, nach §. 42 vorher, $= -\frac{q^a}{q^z}(z^m \pi - m z^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1}\ z^{m-2} \pi^3 - \ldots + \ldots \mp m . \overline{m-1} \ldots 1 . \pi^{m+1}) + C = -\frac{r^z}{r^a}(z^m \pi - m z^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1}\ z^{m-2} \pi^3 - \ldots + \ldots \mp m . \overline{m-1} \ldots 1 . \pi^{m+1}) + C$. Da ferner das Integral $= 0$ wird, wenn $x = 0$, folglich $z = a$ ist, so wird der vollständige Werth $= \frac{r^a}{r^a}(a^m \pi - m a^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1}\ a^{m-2} \pi^3 - \ldots + \ldots \mp m . \overline{m-1} \ldots 1 . \pi^{m+1}) - \frac{r^z}{r^a}(z^m \pi - m z^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1}\ z^{m-2} \pi^3 - \ldots + \ldots \mp m . \overline{m-1} \ldots 1 . \pi^{m+1})$.

Wird aber $x = a$ gesetzt, so wird $z = 0$, und für diesen Fall ist der Werth des Integrals $= a^m \pi - m a^{m-1} \pi^2 + m . \overline{m-1}\ a^{m-2} \pi^3 - + \ldots \mp m . \overline{m-1} \ldots 1 . \pi^{m+1} \pm$

$\frac{m.\overline{m-1}..1\,\pi^{m+1}}{ra}$ oder auch $= a^m\pi -$ $m a^{m-1}\pi^2 + m.\overline{m-1}\,a^{m-2}\pi^3 - .. + .. \mp$ $m.\overline{m-1}..1\,\pi^{m+1}\left(1-\frac{1}{r^a}\right)$ wo der letzte Theil bejaht wird, wenn m eine grade Zahl ist, sonst aber verneint ist.

Wäre also z. B. $m = 1$, so hätte man $\int\frac{(a-x)\,dx}{rx} = a\pi - \pi^2\left(1-\frac{1}{r^a}\right)$. Sollte m $= 2$ seyn, so wäre $\int\frac{(a-x)^2\,dx}{rx} = a^2\pi - 2a\pi^2 + 2\pi^3\left(1-\frac{1}{ra}\right)$; etc.

Anm. Uebrigens mufs ich hier nochmals die Bemerkung wiederhohlen, dafs diese Rente, die jeden Angenblick nach gleichnamigen Potenzen von $\overline{a-x}$ abnimmt, mit der im §. 43 erwähnten Rente, die jährlich nach den Potenzen von $a-n$ abnimmt wo für n nur ganze Zahlen gesetzt werden dürfen, nicht zu verwechseln sey, wenn auch diese letzte Rente so wie nach §. 44. 1 in augenblicklichen Terminen bezahlt werden sollte.

Zweiter Abschnitt.

Von

Renten und Anwartschaften, die von einer einzigen Person Leben abhangen.

Erstes Kapitel.

Von

der Sterbensordnung und den Mortalitäts-Tabellen.

§. 45. a.

Wenn eine Rente entweder während des Lebens einer bestimmten Person oder auch von ihrem Tode an bezahlt werden soll, imgleichen wenn eine gewisse Summe bey dem Tode einer bestimten Person zur Zahlung verfällt, so kömmt es darauf an zu wissen, wie lange diese Person der Wahrscheinlichkeit nach leben werde. Dies ergiebt die *Sterbensordnung*, d. i. die Regel, wonach eine Anzahl gleich alter Personen successiv abstirbt, und die nach die-

ser Regel verfaſste *Mortalitäts-Tabelle.* Solche Mortalitäts-Tabellen gründen sich indeſsen auf die gesammelten Erfahrungen, und können daher auch nur einigermaaſsen zuverläſsig seyn, wenn die Erfahrungen über eine groſse Anzahl von Personen, in nicht zu entfernten Ländern und nicht zu lange verfloſsener Zeit, kurz unter Umständen angestellt sind, welche denen, worauf die Resultate der Erfahrungen angewandt werden sollen, so viel möglich gleich sind.

§. 45. b.

Für die brauchbarsten Mortalitäts-Tabellen zu dem gegenwärtigen Zwecke halte ich:

1) Die *Süſsmilch-Baumannsche*, welche zuerst *Süſsmilch* aus vielen Erfahrungen zusammengesetzt, und nach ihm *Baumann* in der neuen Ausgabe des Süſsmilchschen Werks *über die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts* u. s. w. berichtigt hat. Diese Tabellen sind für Deutschland und das mittlere Europa, wenn es nämlich auf die Sterblichkeit der Volksmaſse im Gauzen ankömmt, die brauchbarsten.

2) Die von *P. Wargentin* aufgestellte Mortalitäts-Tabelle, die nach den über Schweden gesammelten Erfahrungen verfertigt ist. Diese Tafel, wonach das Absterben im Ganzen genommen weit langsamer geschieht als nach der Süſsmilchschen, ist hauptsächlich im nordlichen Europa, ebenfalls in

Ansehung der Sterblichkeit der gesammten Bevölkerung, anwendbar.

3) Die *Sterbensordnung der Rentenirer*, die zuerst von *Déparcieux* verfaſst und nachher von *Florencourt* verbeſsert ist. Danach ist die Sterblichkeit bis etwa zum 44sten Jahre etwas gröſser als nach der Wargentinschen Tabelle, von diesem Zeitpunkt an aber beträchtlich geringer. Sie kann bey ausgesuchten Gesellschaften solcher Personen, die frey von Anstrengungen und in einem gewiſsen Wohlstande leben, gebraucht werden.

Die übrigen Mortalitäts-Tabellen sind gröſstentheils nach den über einzelne Länder, die ihre besondre Localität haben, gesammelten Erfahrungen verfertigt, und auſserdem wenig anwendbar.

Noch erwähne ich hier der *Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens*, wonach der Abgang für alle Lebensjahre gleich angenommen wird. Sie ward zuerst von *de Moivre* gebraucht, der dabey zugleich das 86ste Jahr als das höchste Lebensziel annahm. Diese Hypothese stimmt im Allgemeinen mit den bisherigen Erfahrungen wenig überein, indeſsen kann sie doch unter Modificationen, welche weiter unten werden angeführt werden, zur Auffindung von Näherungswerthen gebraucht werden.

Die angeführten Tabellen finden sich unter andern auch in Tetens *Einleitung etc.* und Brune's *Berechnung der Lebensrenten.* Die Einrichtung derselben ist leicht zu übersehen. Es ist darin gewöhnlich, auſser der Anzahl von Personen, die von

der Fundamental-Anzahl im Anfange jedes Lebens-Jahrs noch übrig sind, auch der Abgang jedes Jahrs oder das *Decrement*, angegeben. Dieser Abgang erfolgt begreiflich succeſsiv während des ganzen Jahrs, worauf bey der Berechnung Rücksicht zu nehmen ist.

In der Wargentinschen und Florencourtschen Tabelle ist die Fundamentalzahl für das Alter 0 = 10000, in der Süſsmilchschen Tafel aber nur = 1000. Für die Genauigkeit der Rechnung kann letzteres freilich hinreichen, da die einzelnen Erfahrungen nicht einmal bis dahin mit den Tabellen zusammenstimmen; indeſsen entstehen hiedurch in den Zahlen des jährlichen Abgangs, den Lebensdauern und den Renten Sprünge, welche billig vermieden werden sollten.

In der Süſsmilchschen Tabelle ist die Zahl der Lebenden bey dem Jahre 96 und in den beiden andern Tabellen bey dem Jahre 97 = 0, welche Jahre also als das höchste Lebensziel angenommen sind. Freilich erreichen Einzelne ein höheres Alter; dies kömmt aber bey der in den Tabellen angegebenen Anzahl nicht in Betracht.

Anm. Von sonstigen Sterblichkeits-Tabellen findet man in Tetens *Einleitung etc.* die *Baumannsche* von der *Churmark*, die *Kerseboomsche* über *Holland* und *Westfriesland*, die *Londoner* nach *Simpſon*, die *Northamptoner* nach *Price*, die *Breslauer* nach *Halley*, die *Wargentinsche* für jedes Geschlecht besonders, imgleichen die *Krittersche* für *Ehemänner* und *Ehefrauen* besonders. In Morgans Principles etc. steht Seite 298 eine Sterbensordnung aus *Chester* für jedes Geschlecht.

Daſs die Sterblichkeit für die beiden Geschlechter nicht

gleich sey, ist aus der Verschiedenheit der Entwickelungsperioden abzunehmen, und wird durch die Erfahrung bestätigt. Bey Berechnungen, die von dem Leben einer oder zweier Personen abhangen, ließe sich auch noch wohl auf diese Verschiedenheit der Sterblichkeit beider Geschlechter Rücksicht nehmen, bey Renten etc. für mehrere Personen würde es sehr mühsam seyn, zwey verschiedene Sterbensordnungen zum Grunde zu legen.

Ein ziemlich vollständiges Verzeichniſs der ältern Schriften über die Ordnung der Sterblichkeii findet man in *Süſsmilchs göttlicher Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts etc.* zweite Ausgabe von Chr. Jac. Baumann, im zweiten Theil, Seite 25 etc.

§. 46.

Das gewöhnliche und fast einzige Hülfsmittel zur Verfertigung der Mortalitätstabellen sind die *Todtenlisten.* Wenn man nämlich weiſs, wie viel Personen von jedem Alter in einem etwas beträchtlichen Lande und in einer nicht zu kurzen Reihe von Jahren gestorben sind, so kann man daraus eine Mortalitätstafel berechnen. Es sind z. B. im Königreiche Dänemark, mit Ausnahme der Herzogthümer, in den zehn Jahren vom Anfange 1811 bis Ausgang 1820 gestorben:

Zwischen	0	und	10	Jahren	84700	Personen
-	10	-	20		10678	
-	20	-	30		14219	
-	30	-	40		14844	
-	40	-	50		16596	
-	50	-	60		20913	
-	60	-	70		29516	

Zwischen 70 und 80 Jahren 28449 Personen
- - 80 - 90 14324
über 90 1998

Hieraus ergiebt sich also, wenn die Zahlen von unten auf summirt werden, folgende Mortalitätstafel:

Alter	Lebende im Anfange des Jahrzehends	Abgang in 10 Jahren
0 bis 10	236237	84700
10 - 20	151537	10678
20 - 30	140859	14219
30 - 40	126640	14844
40 - 50	111796	16596
50 - 60	95200	20913
60 - 70	74287	29516
70 - 80	44771	28449
80 - 90	16322	14324
90	1998	1998

Für je mehrere einzelne Lebensjahre man die Angaben hat, desto richtiger kann die Tabelle werden; wo die besondern Angaben fehlen, da muſs man den für mehrere Jahre angegebenen Abgang über die einzelnen Jahre vertheilen.

Um die Zuverläſsigkeit solcher Mortalitätstafeln gehörig schätzen zu können, muſs man bedenken, daſs die Todtenlisten, wenn auch bey der Führung und Redigirung derselben keine Irrthümer vorfallen sollten, doch

1) nicht ausschliesslich, auch nicht vollständig diejenigen Personen enthalten, die im Lande gebohren sind, sondern alle, welche in dem Lande sterben, wobey es dann darauf ankömmt, ob die Ein- und Auswanderungen sich einigermaassen gleich sind;

2) dass das Alter der Gestorbenen oft unrichtig angegeben wird, zumal von Personen aus den untern Volksklassen, die zuweilen das Alter der Ihrigen nicht genau kennen;

3) aber und besonders, dass die Personen von verschiedenen Altern, welche zugleich sterben, in verschiedenen Zeiten gebohren sind, und daher die Mortalitätstabelle nur dann richtig seyn kann, wenn die Bevölkerung während der gesammten Zeit im Ganzen genommen sich gleich geblieben ist. Im Allgemeinen nimmt aber die Bevölkerung zu, und es können daher die Personen z. B. von 80 Jahren, welche jetzt sterben, nicht geradezu in eine und dieselbe Tabelle mit denen, die etwa im ersten Jahre sterben, zusammengestellt werden, indem die erstern zu einer Zeit gebohren sind, wo die Volkszahl geringer war als jetzt. Will man die Anzahl der Personen von allen Altern in ein richtiges Verhältniss setzen, so gehören dazu wieder gesammelte Erfahrungen über das Maass der Bevölkerungs-zunahme.

Dieser letzte Punct ist bey allen mir bekannten Mortalitätstafeln, wenig oder gar nicht beachtet, und

daher auch die Sterblichkeit mehr oder weniger zu grofs angegeben.

Anm. In Dännemark, die Herzogthümer ungerechnet, belief die Volkszahl im Jahre 1769 sich auf 786040, im Jahre 1801 aber auf 924347. Könnte man annehmen, dafs die Volksvermehrung beständig gleich gewesen, so gäbe dies den Exponenten der jährlichen Zunahme = 1,005078. Wenn man diese Zahl m nennt, so müfste man die aus der Todtenliste sich ergebende Zahl für jedes Altersjahr n mit m^n multipliciren, um dieselbe gegen die Zahl vom Alter o in ein richtiges Verhältnifs zu setzen. Für das Lebensjahr 80 ist $m^n = 1,4996$, beinahe = 1,5, woraus sich ergiebt, wie beträchtlich hiedurch die Zahlen der Todtenlisten verändert werden können.

§. 47.

Aus den *Volks- Zählungs- Listen* läst sich freilich unmittelbsr keine Sterbensordnung machen; die Zählungslisten stellen das Bestehende, die Todtenlisten aber den Wechsel dar. Indefsen kann man doch die Zählungslisten zur Prüfung der Mortalitätstabellen anwenden. Dabey kömmt aber Folgendes in Betracht. Die Personen, welche bey der Zählung unter dem Alter von n Jahren angeführt werden, sind theils so eben n Jahre alt geworden etc., theils beinahe n + 1 Jahre alt, also im Ganzen genommen vom Alter $n + \frac{1}{2}$ Jahren. Von denen, welche so eben n Jahre alt geworden sind, ist noch Keiner verstorben, dagegen ist von denen, die gleich n + 1 Jahr alt werden, das jährliche Decrement schon abgegangen; im Ganzen ist daher von diesem Alter das halbe Decrement verstorben. Soll also die Mor-

talitätstabelle mit der Zählungsliste verglichen werden, so muſs vorher von der Zahl jedes Jahrs oder jeder Periode in der Mortalitätstabelle das halbe Decrement deſselben Jahrs oder derselben Periode abgezogen werden.

Umfaſsen die Volkszählungslisten übrigens ein groſses Land, so könnten die Sterblichkeitstafeln danach wesentlich verbeſsert werden, wenn nicht auch bey denselben sehr erhebliche Mängel fast unvermeidlich wären. Denn, wenn auch bey der Zählung und Aufzeichnung alle nöthige Sorgfalt angewendet wird, so werden doch:

1) stets mehr oder weniger Personen übergangen oder unrichtig gezählt werden, insbesondre aber

2) die Angaben des Alters hier um so weniger zuverläſsig seyn, da sowohl das Intereſse in Beziehung auf solche Verpflichtungen im Staate, die mit einem bestimmten Alter anfangen, als die Eitelkeit derer, welche für jünger gehalten seyn wollen als sie sind, hier mitwirken.

Uebrigens würde nach geschehener Berichtigung der Mortalitätstabellen immer dasjenige, was vorher über die Zunahme der Volksmenge angeführt worden, zu beachten seyn.

Anm. Aus dem, was hier bemerkt worden ist, ergiebt sich auch, wie man zu verfahren habe, wenn man nach den Mortalitätstabellen ausmitteln will, wie viel Personen von einem bestimmten Alter unter einer gegebenen Volksmenge leben. Es ist nämlich nicht genug, die Zahlen der Lebenden aller Jahre in der Mortalitätsta-

belle zu addiren, und dann daraus zu extrahiren, wie viele Personen unter der ganzen Anzahl von dem bestimmten Alter sind; sondern man muſs vorher von allen Zahlen die halben Decremente abziehen. Bey den mittlern Jahren sind freilich die Decremente nicht groſs, besonders im Verhältniſs gegen die Hauptzahlen. In den Jahren der Kindheit und des höhern Alters ist aber das Verhältniſs der Decremente gegen die Hauptzahlen beträchtlicher und kann nicht füglich unbeachtet bleiben. Ueberdem müſste man bey der hier in Frage stehenden Berechnung, wenn etwa die Mortalitätstabelle nach dem Beharrungszustande verfaſst seyn, die Bevölkerung aber regelmäſsig zugenommen haben sollte, die aus den Sterblichkeitstafeln genommenen Zahlen von Alter 1 an jede mit der zugehörigen Potenz des Exponenten der Volksvermehrung dividiren.

§. 48.

In unsern Zeiten, wo, wenn auch nicht die übrigen Fortschritte der Arzneykunst, doch gewiſs die Entdeckung der Vaccine einen unbezweifelten Einfluſs auf die Sterblichkeit, wenigstens der frühern Jahre, gezeigt hat, muſs man bey Anwendung der vorhandenen Mortalitätstabellen besonders vorsichtig seyn, die jedesmal eintretenden Umstände und gegebenen Erfahrungen sorgfältig prüfen, und wo von den Tabellen ein practischer Gebrauch zur Berechnung von Leibrenten und Anwartschaften gemacht werden soll, eine solche Sterbensordnung zum Grunde legen, daſs die bestimmten Zahlungen mit Sicherheit geleistet werden können.

Anm. 1. Ueber den Einfluſs der Vaccine auf die Sterblichkeit kann man bisher noch keine vollständige Erfahrungen ha-

ben; auch wird es immer schwer seyn zu bestimmen, was der Vaccine allein in dieser Hinsicht zuzuschreiben ist. Dafs sich aber die Sterbliehkeit der Kindheit in den letzten Jahren bedeutend vermindert habe, wird aus folgendem Beispiel erhellen. In den zehn Jahren von 1811 bis 1820 sind in Dännemark, die Herzogthümer, Island, Grönland und die aufsereuropäischen Bezitzungen ungerechnet, gebohren 307608 Personen, dagegen sind in der nämlichen Zeit vom Alter 0 bis zum Ablauf des 10ten Jahrs, wie schon angeführt, gestorben 84700. Beide Data sind ziemlich zuverläfsig, da die vorhin erwähnten Irrthümer bey der Angabe der Gebohrnen imgleichen der gestorbenen Kinder nicht so leicht als sonst vorfallen können. Da die Gestorbenen im Durchschnitte genommen etwa 5 Jahr alt waren, so kann man, um zugleich auf die zunehmende Volksmenge einigermaafsen Rücksicht zu nehmen, die Zahl der Gebohrnen mit der 5ten Potenz des vorhin angegebenen Exponenten der Bevölkerungszunahme dividiren, Hiedurch erhält man 299916, als die muthmaafsliche Anzahl der Gebohrnen, von denen vor dem 11ten Jahre 84700 abgegangen sind, und folglich 215216 das 11te Jahr erreichten, welches auf 1000 Neugebohrne 717 beträgt. Nach Wargentins Mortalitätstafel erleben dagegen von 1000 Neugebohrnen nur 611 und nach Süfsmilchs Tabelle gar nur 532 das 11te Jahr.

Welchen Einflufs die Vaccination und andre Entdeckungen in der Arzeneykunst auf die Sterblichkeit in den übrigen Perioden des Lebens haben, insbesondre wie die Sterblichkeit in diesen Perioden zunehmen möchte, werden erst die kommenden Generationen beurtheilen können.

Je mehr nun in diesem Augenblicke alle empirische Sterbensordnungen als unzuverläfsig anzusehen sind, desto weniger habe ich geglaubt, die Berechnungen nach der Hypothese des gleichmäfsigen Abgangs, welcher sich vielleicht mit der Zeit die einzelnen Sterbensordnungen unter Modificationen mehr nähern möchten, übergehen zu dürfen.

Anm. 2. Ueber die Anwendung der Mortalitätstabellen auf

Versorgungs-Anstalten insbesondre glaube ich noch folgende Bemerkungen hinzufügen zu müfsen.

Eine jede Versorgungs-Anstalt, in dem Sinne worin das Wort hier genommen wird, macht gewifsermaafsen eine ausgesuchte Gesellschaft aus. Die Todtenlisten und Mortalitätstafeln gründen sich auf die Erfahrungen über das Absterben unter der ganzen Volksmafse; an den Versorgungs-Anstalten nehmen dagegen, mit fast gänzlicher Ausschliefsung der arbeitenden Clafse unter dem Landvolke, und der ärmeren Clafse unter den Stadtbewohnern, im Allgemeinen nur solche Personen Antheil, die ein weniger beschwerliches Leben führen und gröfsere Sorgfalt auf Erhaltung ihrer Gesundheit verwenden können.

Wenn ferner auch solche Versorgungsanstalten, wie das häufig bey öffentlichen Witwenkafsen der Fall ist, mit der Bestimmung errichtet sind, dafs gewifse Clafsen von Bürgern im State zu dem Eintritt verpflichtet sind, so bleibt die Theilnahme doch in mancher Hinsicht freiwillig, da die Gröfse der zu versichernden Summe innerhalb der Gränsen des festgesetzten Maximums und Minimums häufig von der Willkühr der Theilnehmer abhängt, oft auch solche Interefsenten, die zum Eintritt nicht verpflichtet sind, aufgenommen werden können. Es ist also zu erwarten, dafs diejenigen, welche glauben verhältnifsmäfsig durch die Anstalt gewinnen zu können, gröfsere Summen versichern, als diejenigen, die dabey zu verliehren fürchten.

Ist aber gar der Eintritt in eine Gesellschaft dieser Art ganz freiwillig, so können und werden die Theilnehmer noch weit mehr alle Umstände benutzen, um von der Kafse den möglich gröfsten Vortheil zu ziehen.

Freilich pflegt man bey dem Eintritt in die Kafse von den Versorgern Gesundheitsatteste zu fordern. Wenn diese aber auch durchgängig gewifsenhaft ertheilt werden, so mufs doch der Arzt dabey immer auf dasjenige, was ihm mit Bestimmtheit bekannt ist, seine Versicherung beschränken. Die Pensionisten mufs man dagegen bey dem Eintritt annehmen wie sie sind,

wiewohl man mit Zuverläſsigkeit voraufsetzen kann, daſs im Ganzen genommen ihre Gesundheit beträchtlich beſser sey, als wenn eine eben so groſse Anzahl von Rentennehmern im Durchschnitt aus der ganzen Bevölkerungsmaſse genommen würde.

Es ist daher auch gar nicht zu erwarten, daſs eine Mortalitätstabelle, die aus den Erfahrungen über die Sterblichkeit der ganzen Bevölkerung genommen ist, für eine solche Gesellschaft ausgesuchter Subjecte als sichre Regel gelten könne.

Das folgende Beispiel wird dies noch mehr bestätigen. Bey der *Kopenhagener allgemeinen Versorgungsanstalt*, die im Jahre 1795 unter der Mitwirkung von *Tetens* errichtet wurde, und Versorgungen fast aller Art übernahm, war der Einschuſstarif nach der Süſsmilchschen Mortalitätstafel mit einigen Modificationen berechnet. (Die Süſsmilchschen Zahlen der Lebenden waren im Allgemeinen bis zum 75sten Jahre um 20 vermehrt, das Alter der zu pensionirenden Frauenzimmer wurde bey der Bestimmung des Einschuſses um 5 Jahre niedriger angenommen etc.) Auch war bey dem Tarif der Zinsfuſs von $3\frac{1}{2}$ Procent zum Grunde gelegt, obgleich die Kaſse selbst ihre Kapitale zu $3\frac{3}{4}$ bis 4 Procent benutzte. Gleichwohl sah man sich genöthigt, den Einschuſstarif im Jahre 1800 um 5 Procent und im Jahre 1805 nochmals um 5 Procent zu erhöhen. Bey einer spätern Revision der Anstalt im Jahre 1815 fand sich dennoch, daſs sie mit ihren eignen Mitteln nicht bestehen könne. Die Regierung, welche die Garantie für die Kaſse übernommen hatte, läſst jetzt die versicherten Pensionen und Anwartschaften planmäſsig auszahlen, aber sie nimmt keine neue Intereſsenten an.

Dagegen besteht die *Kopenhagener Wittwencaſse*, deren Tarif ebenfalls nach der Süſsmilchschen Mortalitätstabelle, jedoch nach dem Zinsfuſs von 4 Procent, berechnet ist, seit dem Jahre 1775, und wird hoffentlich ferner bestehen; indeſsen beweiset dies nicht die Richtigkeit der Süſsmilchschen Sterbensordnung. Die Anstalt ist bloſs eine Wittwenkaſse, und versichert allein *Ueberlebensrenten*, worauf die Verschiedenheit der Sterbensord-

nungen nicht den nämlichen Einfluſs hat als auf die gewöhnlichen Leibrenten, indem die Ueberlebensrenten durch Subtraction der Verbindungsrenten von den Leibrenten berechnet werden, wo also, wenn Mängel Statt finden, der eine den andern wenigstens zum Theil aufheben kann. Die Kaſse hat ferner bedeutende Nebeneinnahmen, da alle Beamte, mögen sie verheirathet seyn oder nicht, von ihren Besoldungen den Belauf des ersten Monats als eine Beysteuer zu der Kaſse entrichten, auch alle sonstige freiwillige Interessenten, auſser dem tarifmäſsigen Einsatz, eine Recognition von 10 Procent des Einschuſses erlegen müſsen. Auſserdem kommen der Kaſse fundationsmäſsig alle Pensionen von Witwen, die wieder heirathen, so lange sie im Ehestande leben, zu gute, obgleich bey dem Tarif auf das Wiederheirathen keine Rücksicht genommen ist. Endlich ist die Anstalt nur mit Einschränkungen als eine ausgesuchte Gesellschaft zu betrachten, indem alle öffentliche Bediente ohne Ausnahme zum Eintritt verpflichtet sind, dabey aber für solche, die keinen vorschriftsmäſsigen Gesundheitsſchein beibringen können, das Risico von der allgemeinen Pensionsanstalt übernommen wird.

Wenn übrigens Herr Morgan in der Vorrede zu seinen Principles and doctrine of aſsurances etc. von der equitable society, bey welcher ein Actuar ist, sagt: The Equitable Society proceeded quietly in the same course for near twenty years before they ventured upon any change. During that period the decrements of life among the members had attained such a degree of regularity, that very little risk was incurred in founding any new measure on the presumtion that they would continue to be equally so. The experience of the last forty years has confirmed this opinion, and the *probabilities of life among the members of the Society may now be considered as uniformly regular as they are among the general maſs of inhabitants in this country:* so läſst sich zwar, da übrigens keine specielle Umstände über die gedachte Gesellschaft mitgetheilt sind, der Grund dieser unerwarteten Uebereinstimmung der (vermuthlich Northamptoner) Tabellen mit der wirklichen Sterblichkeit in Lon-

don nicht genauer untersuchen. Indefsen sieht man doch aus Morgans wenigen Angaben, dafs die Gesellschaft von sehr grofsem Umfange sey, und aus Personen fast aller Alter bestehe, und es läfst sich daraus einigermaafsen erklären, dafs die Sterblichkeit unter einer solchen Anzahl verschiedener Personen sich mehr dem allgemeinen Maafse der Sterblichkeit nähere als in kleinern ausgesuchten Gesellschaften.

Zweites Kapitel.

Von der Berechnung der Lebensdauer und der Wahrscheinlichkeit des Lebens.

---

§. 49.

Um die Berechnungen über die Dauer und Wahrscheinlichkeit des Lebens leichter übersehen zu können, bezeichne man die zum Alter a gehörige Zahl der Lebenden in den Tabellen mit A, ferner die zu dem Alter a + 1 gehörige Zahl mit $A\overset{1}{-}$, die zum Alter a + 2 gehörige Zahl mit $A\overset{2}{-}$, so wie überhaupt die zum Alter a + n gehörige Zahl mit $A\overset{n}{-}$, wo der Streich unter den zur Rechten stehenden Zahlen hinzugefügt ist, um sie von den Exponenten der Potenzen zu unterscheiden. Wenn al-

so $a = 50$, so ist nach der Süfsmilchschen Tabelle $A = 300$, $A^{\underline{1}} = 291$, $A^{\underline{2}} = 282$ u. s. w.

Ferner bezeichne man das zu A gehörige Decrement oder $A - A^{\underline{1}}$ mit ΔA, das zu $A^{\underline{1}}$ gehörigen Decrement oder $A^{\underline{1}} - A^{\underline{2}}$ mit $\Delta A^{\underline{1}}$, so wie überhaupt das zu $A^{\underline{n}}$ gehörige Decrement oder $A^{\underline{n}} - A^{\underline{n+1}}$ mit $\Delta A^{\underline{n}}$.

So wie die Decremente die ersten Differenzen der Hauptreihe ausdrucken, kann man auch wieder von dem zum Alters-Jahr a gehörigen Decrement das Decrement des Jahre $a + 1$, von letzterem das des Jahrs $a + 2$, so wie überhaupt von dem Decrement des Jahrs $a + n$ das Decrement des Jahrs $\overline{a + n + 1}$ abziehen, wodurch man eine Reihe der Differenzen der Decremente, oder der zweiten Differenzen der Hauptreihe, erhält. Man bezeichne also $\Delta A - \Delta A^{\underline{1}}$ mit $\Delta . \Delta A$ oder $\Delta^2 A$, eben so $\Delta A^{\underline{1}} - \Delta A^{\underline{2}}$ mit $\Delta^2 A^{\underline{1}}$ etc., so wie überhaupt $\Delta A^{\underline{n}} - \Delta A^{\underline{n+1}}$ mit $\Delta^2 A^{\underline{n}}$.

Gleichfalls könnte man von diesen zweiten Differenzen der Hauptreihe wieder auf ähnliche Weise die Differenzen, d. h. die dritten Differenzen der Hauptreihe, suchen und $\Delta^2 A - \Delta^2 A^{\underline{1}}$ mit $\Delta . \Delta^2 A$ oder $\Delta^3 A$, $\Delta^2 A^{\underline{1}} - \Delta^2 A^{\underline{2}}$ mit $\Delta^3 A^{\underline{1}}$ so wie überhaupt $\Delta^2 A^{\underline{n}} - \Delta^2 A^{\underline{n+1}}$ mit $\Delta^3 A^{\underline{n}}$ bezeichnen.

Wollte man diese Operation noch weiter fortsetzen, so würde überhaupt

$\Delta^{m} A^{\underline{n}} = \Delta^{m-1} A^{\underline{n}} - \Delta^{m-1} A^{\underline{n+1}}$ seyn.

§. 50.

Hiernach wird man leicht übersehen können, wie die vorerwähnten Gröſsen von einander abhangen. Es besteht nämlich A aus den nach und nach vom Jahre a bis zum höchsten Lebens-Ziel erfolgenden Abgängen, oder es ist $A = \Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x-1}}$, wo $a + x$ das höchste Lebensziel seyn soll. Kürzer kann man diese Summe, nämlich $\Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}}$, wo das letzte Glied $= 0$ ist, mit $\int \Delta A^{\underline{,0}}$ bezeichnen, wobey, wenn keine andere Bezeichnung hinzugefügt ist, immer vorausgesetzt werden soll, daſs die Reihe bis zum höchsten Lebensziel fortgesetzt werde.

Eben so ist:

$A^{\underline{1}} = \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}} = \int \Delta A^{\underline{,1}}$

$A^{\underline{2}} = \Delta A^{\underline{2}} + \Delta A^{\underline{3}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}} = \int \Delta A^{\underline{,2}}$

so wie überhaupt

$A^{\underline{n}} = \Delta A^{\underline{n}} + \Delta A^{\underline{n+1}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}} = \int \Delta A^{\underline{,n}}$

wo in den Summen $\int \Delta A^{\underline{,1}}$, $\int \Delta A^{\underline{,2}}$, $\int \Delta A^{\underline{,n}}$ etc. die Reihe jedesmal bis $\Delta A^{\underline{x}}$ fortzusetzen ist.

Anm. Es werden also hier die Summen nicht, wie es sonst gewöhnlich ist, durch das letzte, sondern durch das erste Glied bezeichnet, aus dem Grunde, weil der Anfangstermin der Reihe sehr verschieden seyn kann, der Endtermin aber gewöhnlich das höchste Lebensziel nach den Tabellen ist. Dafs übrigens eine Reihe dieser Art mit $A^{\underline{n}}$ anfange, soll durch das von dem Index stehende Comma angedeutet werden. Dagegen soll $\int A^{\underline{n}}$ ohne Comma vor dem Index die mit A^{1} anfangende und bis zu $A^{\underline{n}}$ fortgehende Summe bedeuten. Nur wo die Reihe mit A^{0} anfängt, ist das Comma späterhin weggelafsen.

Uebrigens ist freilich, wenn $a + x$ das höchste Lebensziel ist, $A^{\underline{x}} = 0$, nnd $\Delta A^{\underline{x}} = 0$. Wenn man indefsen annimmt, dafs der Abgang nicht auf einmal, sondern succefsiv in jedem Jahre geschehe, so mufs auch das Absterben von $\Delta A^{\underline{x-1}}$ während des Altersjahrs $\overline{a + x - 1}$ fortdauern, und es wird erst mit dem Anfangspunkte des Jahrs $\overline{a + x}$ die Zahl der Lebenden $= 0$.

§. 51.

Sollte ferner die Summe derer, welche in der Reihe von Jahren von a an bis zum Altersziel leben, d. h. die Summe der Hauptzahlen

$A^{\underline{0}} + A^{\underline{1}} + A^{\underline{2}} + \ldots + A^{\underline{x}}$ durch die Decremente bestimmt werden, welche Summe nach dem Vorhergehenden mit $\int A^{\underline{,0}}$ bezeichnet werden kann, so ist

$$\left.\begin{array}{l}
A = \Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \Delta A^{\underline{3}} + \ldots \\
A^{\underline{1}} = \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \Delta A^{\underline{3}} + \ldots \\
A^{\underline{2}} = \Delta A^{\underline{2}} + \Delta A^{\underline{3}} + \ldots \\
\text{etc. etc.} \\
A^{\underline{x}} =
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \Delta A^{\underline{x}} \\ + \Delta A^{\underline{x}} \\ + \Delta A^{\underline{x}} \\ \quad \Delta A^{\underline{x}}, \end{array}\right.$$

folglich $\int A'^{\underline{0}} = \Delta A^{\underline{0}} + 2 \Delta A^{\underline{1}} + 3 \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + n \Delta A^{\underline{n-1}} + \ldots + \overline{x+1}\ \Delta A^{\underline{x}}$.

Auch ist $\int A'^{\underline{0}} = \int \Delta A'^{\underline{0}} + \int \Delta A'^{\underline{1}} + \int \Delta A'^{\underline{2}} + \ldots + \int \Delta A'^{\underline{x}}$, d. h. gleich der Summe der Summen der Decremente, welche Summe der Summen man mit $S \int \Delta A'^{\underline{0}}$ oder $\int^{2} \Delta A'^{\underline{0}}$ bezeichnen kann.

Wollte man die Summe der Summen der Lebenden, d. i. die Summe von $\int A'^{\underline{0}} + \int A'^{\underline{1}} + \int A'^{\underline{2}} + \ldots + \int A'^{\underline{x}}$, welche Summe man mit $S \int A'^{\underline{0}}$ oder $\int^{2} A'^{\underline{0}}$ bezeichnen kann, durch die Decremente bestimmen, so wäre

$$\begin{array}{l} \int A'^{\underline{0}} = \Delta A + 2 \Delta A^{\underline{1}} + 3 \Delta A^{\underline{2}} + \ldots \\ \int A'^{\underline{1}} = \qquad\qquad \Delta A^{\underline{1}} + 2 \Delta A^{\underline{2}} + \ldots \\ \int A'^{\underline{2}} = \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta A^{\underline{2}} + \ldots \end{array}$$

etc. etc.

$$\left.\begin{array}{l} + \overline{x+1}\ \Delta A^{\underline{x}} \\ + \overline{x}\ \Delta A^{\underline{x}} \\ + \overline{x-1}\ \Delta A^{\underline{x}}, \end{array}\right.$$

folglich $\int^{2} A'^{\underline{0}} = \Delta A^{\underline{0}} + 3 \Delta A^{\underline{1}} + 6 \Delta A^{\underline{2}} + 10 \Delta A^{\underline{3}} + \ldots + \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2} \Delta A^{\underline{n}} + \ldots$

$+ \frac{\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.2} \Delta A^{x}$. Daſs das allgemeine Glied $=$ $\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2} \Delta A^{n}$ sey, erhellet daraus, weil bey dem $\overline{n+1}$ten Gliede, welches $\int \Delta A'^{n}$ zum Factor hat, der Coefficient aus den Theilen $\overline{n+1} + n + \overline{n-1} + \ldots + 1$ besteht, wovon die Summe $= \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2}$ ist.

Sollten auch etwa die höhern Summen der Lebenden auf ähnliche Weise ausgedruckt werden, so würden sie auf dieselbe Weise gefunden werden. Es ergiebt sich nämlich von selbst, daſs da in der zuletzt angeführten Reihe jeder Cofficient aus den Summen der natürlicher Zahlen von 1 an bis $\overline{n+1}$ besteht, diese Coefficienten die sogenannten Triangularzahlen sind, und das man bey weiterer Fortzetzung für die Coefficienten die dreyseitigen Pyramidalzahlen der ersten, zweiten etc. Ordnung erhalten müſse.

§. 52.

Eben so wie die Decremente abhangen von den Zahlen der Hauptreihe, hangen die Differenzen ab von den Decrementen, nur mit dem Unterschiede, daſs die Decremente der Natur der Sache nach durchgängig bejaht sind, die Differenzen des ersten und der folgenden Grade indeſsen bejaht oder verneint oder auch $= 0$ seyn können. Es ist nämlich:

$$\Delta A^{\underline{0}} = \Delta^2 A + \Delta^2 A^{\underline{1}} + \Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}} = \int \Delta^2 A'^{\underline{0}},$$
$$\Delta A^{\underline{1}} = \Delta^2 A^{\underline{1}} + \Delta^2 A^{\underline{2}} + \Delta^2 A^{\underline{3}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}} = \int \Delta^2 A'^{\underline{1}},$$
$$\Delta A^{\underline{2}} = \Delta^2 A^{\underline{2}} + \Delta^2 A^{\underline{3}} + \Delta^2 A^{\underline{4}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}} = \int \Delta^2 A'^{\underline{2}},$$

und überhaupt:

$$\Delta A^{\underline{n}} = \Delta^2 A^{\underline{n}} + \Delta^2 A^{\underline{n+1}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}} = \int \Delta^2 A'^{\underline{n}}.$$

Da ferner $\Delta A^{\underline{0}} = \Delta^2 A^{\underline{0}} + \Delta^2 A^{\underline{1}} + \Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}}$, und

$$\Delta^2 A^{\underline{0}} = \Delta^3 A^{\underline{0}} + \Delta^3 A^{\underline{1}} + \Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^3 A^{\underline{x}},$$
$$\Delta^2 A^{\underline{1}} = \Delta^3 A^{\underline{1}} + \Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^3 A^{\underline{x}},$$
$$\Delta^2 A^{\underline{2}} = \Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^3 A^{\underline{x}},$$

etc. imgleichen

$$\Delta^2 A^{\underline{x}} = \Delta^3 A^{\underline{x}},$$

so ist auch $\Delta A^{\underline{0}} = \Delta^3 A^{\underline{0}} + 2\Delta^3 A^{\underline{1}} + 3\Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \overline{x+1}\, \Delta^3 A^{\underline{x}}$.

§. 53.

Hiernach lassen sich auch wieder die Zahlen der Hauptreihe durch die Differenzen ausdrucken. Da nämlich

$$A = \Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}},$$

also auch

$$\Delta A^{\underline{0}} = \Delta^2 A^{\underline{0}} + \Delta^2 A^{\underline{1}} + \Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}}$$
$$\Delta A^{\underline{1}} = \Delta^2 A^{\underline{1}} + \Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}}$$
$$\Delta A^{\underline{2}} = \Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta^2 A^{\underline{x}}$$

etc. etc.

$$\Delta A^{\underline{x}} = \Delta^2 A^{\underline{x}},$$

so ist hiernach

$$A = \Delta^2 A^{\underline{0}} + 2\Delta^2 A^{\underline{1}} + 3\Delta^2 A^{\underline{2}} + \ldots + \overline{x+1}\, \Delta^2 A^{\underline{x}}.$$

Und da ferner

$$\Delta A^{\underline{0}} = \Delta^3 A^{\underline{0}} + 2\Delta^3 A^{\underline{1}} + 3\Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \overline{x+1}\,\Delta^3 A^{\underline{x}}$$

$$\Delta A^{\underline{1}} = \Delta^3 A^{\underline{1}} + 2\Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + x\,\Delta^3 A^{\underline{x}}$$

$$\Delta A^{\underline{2}} = \Delta^3 A^{\underline{2}} + \ldots + \overline{x-1}\,\Delta^3 A^{\underline{x}}$$

etc.

$$\Delta A^{\underline{x}} = \Delta^3 A^{\underline{x}},$$

so hat man auch $A =$

$$\Delta^3 A^{\underline{0}} + 3\Delta^3 A^{\underline{1}} + 6\Delta^3 A^{\underline{2}} + 10\Delta^3 A^{\underline{3}} + \ldots + \frac{n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2}\Delta^3 A^{\underline{n}} + \ldots$$

Anm. Dafs übrigens die Differenzen, in so weit sie verneint sind, von der Summe der bejahten Differenzen abgezogen werden müfsen, ergiebt sich von selbst.

§. 54.

Wenn die *Wahrscheinlichkeit* gesucht wird, dafs *eine Person* vom Alter a *noch n Jahre lebe*, so kömmt es darauf an, wie viel Personen von einer gewifsen Anzahl des gegebenen Alters den Erfahrungen gemäfs nach n Jahren noch im Leben sind, und man kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit als einen Bruch ausdrucken, defsen Nenner gleich der Zahl der Lebenden vom Alter a, defsen Zähler aber gleich der Zahl der Lebenden vom Alter $\overline{a + n}$ ist, d. h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{A^{\underline{n}}}{A}$.

Z. B. nach Süfsmilchs Tabelle erreichen von 300 funfzigjährigen 210 das 60ste Jahr; die Wahrscheinlichkeit für jeden derselben, 60 Jahre alt zu werden, ist also $= \frac{210}{300} = \frac{7}{10}$.

§. 55.

Die Zeit, welche, mit dem schon erreichten Alter einer Person zusammengenommen, das in den Tabellen angegebene höchste Lebensziel ausmacht, heisst *die Alterserganzung* für diese Person. Wenn also $a + x$ das höchste Lebensziel für eine Person vom Alter a ist, so ist x die Alterserganzung für diesen Fall. Man findet demnach die Alterserganzung, wenn man das gegebene Alter von dem nach den Tabellen zu erreichenden höchsten Alter abzieht. In der Süssmilchschen Tabelle z. B. ist das letztere das Ende des 96sten Jahrs, ist also die Person 50 Jahre alt, so ist $96 - 50 = 46$ die Alterserganzung für diese Person.

Anm. Es ist schon oben bemerkt, dass, wenn gleich nach den Süssmilchschen Tabellen bey dem Jahre 96 die Zahl der Lebenden $= 0$ ist, dennoch der Anfang des Jahrs 96 als Endpunkt des Lebens angesehen werden müsse. Freilich ist die Zahl der Lebenden nach Süssmilch bey dem Jahre 95 gleich 1; dies druckt indessen nur das Verhältniss zu der Grundzahl $= 1000$ aus. Wäre die Anfangszahl $= 1000000$, so wäre die Zahl der Lebenden bey dem Jahre 95 $= 1000$, und von diesen würde der letzte kurz vor dem Ende des 96sten Jahrs absterben.

§. 56.

Die Zeit, worin nach den Tabellen die Hälfte der Personen eines gewissen Alters ausgestorben seyn wird, heisst die *wahrscheinliche Lebensdauer* für dieses Alter. Z. B. nach den Süssmilchschen Tabel-

en ist von den 36jährigen die Hälfte im Anfange des Jahrs 61 verstorben, folglich ist $61 - 36 = 25$ die wahrscheinliche Lebensdauer für dieses Alter. *Wahrscheinlich* heiſst diese Lebensdauer daher, weil derer Fälle, da eine Person des gegebenen Alters diesen Zeitpunkt erlebt, mehrere sind als derer Fälle da sie ihn nicht erlebt, auch zugleich der Fälle da sie den Zeitpunkt überlebt weniger sind, als da sie ihn nicht überlebt.

Anm. Genau genommen ist die Wahrscheinlichkeit, daſs ein 36-jähriger 61 Jahr alt werde $= \frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, daſs er ein geringeres Alter erreiche, ist gröſser als $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, daſs er ein höheres Alter erreiche, kleiner als $\frac{1}{2}$.

Indeſsen muſs man mit dieser allgemeinen Wahrscheinlichkeit nicht die besondre Wahrscheinlichkeit verwechseln, daſs jemand *gerade* bis zum 62sten Jahr lebe, und folglich in demselben sterbe. Diese letzte Wahrscheinlichkeit wäre für eine Person von 36 Jahren, nach den Süſsmilchschen Tabellen, da hiernach von 402 36jährigen 9 im 62 sten Jahre sterben, $= \frac{9}{402} = \frac{3}{134}$.

§. 57.

Es sey A die Anzahl der Personen vom Alter a, und x die Altersergänzung, so ist, wie bereits angeführt, $A = \Delta A + \Delta A^1 + \Delta A^2 + \ldots + \Delta A^{x-1}$. Wenn nun die Decremente alle gleich wären, d. h. wenn das *Absterben gleichmäſsig* erfolgte, so wäre, da die Anzahl der Decremente $=$ x ist, die Summe derselben oder $A = x \Delta A$, folglich $\frac{x}{2} A = \frac{x}{2} \Delta A$. Da nach dieser Voraussetzung in jedem Jahre ΔA Personen abgehen, so

würden die Personen $\frac{x}{2} \Delta A$ im $\frac{x}{2}$ Jahren verstorben seyn, d. h. nach dieser Voraussetzung würde das wahrscheinliche Alter gleich seyn der halben Altersergänzung. Wenn aber das Absterben nicht gleichmäfsig erfolgt, d. h. wenn die Decremente ungleich sind, so kann zwar wohl für irgend ein bestimmtes Alter, aber nicht im Allgemeinen für jedes Alter, die wahrscheinliche Lebensdauer mit der Hälfte der Altersergänzung einerley seyn.

§. 58.

Wenn man die Jahre, welche eine Anzahl von Personen gleiches Alters nach den Tabellen noch zu erleben hat, und zwar einige mehr andere weniger, zusammennimmt, und die Summe mit der Anzahl der Personen dividirt, so erhält man einen Durchschnitt des künftigen Alters, der die mittlere künftige Lebensdauer oder kürzer die *mittlere Lebensdauer*, auch die *Existenz* genannt wird. Dies ist das Alter, welches die Personen erreichen würden, wenn sie alle gleich alt würden.

§. 59.

Die mittlere Lebensdauer wird auf folgende Weise gefunden. Wenn die Zahl der Personen vom Alter a gleich A ist und nur auf ganze Jahre gerechnet wird, so leben davon nach den Tabellen

A^1 noch 1 Jahr, ferner A^2 überdem 1 Jahr, A^3 wieder überdem noch 1 Jahr etc. und endlich $A^{\overline{x-1}}$ abermals noch 1 Jahr; die Summe hiervon ist = $A^1 + A^2 + A^3 + \ldots + A^{\overline{x-1}} = \int A'^1$, und wenn man die mittlere Lebensdauer für das Alter a mit Ea bezeichnet, so ist Ea =

$$\frac{A^{\overline{1}} + A^{\overline{2}} + A^{\overline{3}} + \ldots + A^{\overline{x}}}{A} \text{ oder } = \frac{\int A^{'\overline{1}}}{A}.$$

Auch ist, da $\int A'^1 = \Delta A^1 + 2\,\Delta A^2 + 3\,\Delta A^3 + \ldots + x\,\Delta A^x$ ist, Ea =

$$\frac{\Delta A^1 + 2\,\Delta A^2 + 3\,\Delta A^3 + \ldots + x\,\Delta A^{\overline{x}}}{A} = \frac{\int^2 \Delta A'^1}{A}.$$

§. 60

Im vorhergehenden §. sind jedoch nur ganze Jahre in Betracht gekommen, und die Rechnung ist so geführt, als wenn nur die Anzahl A^1 von Personen, welche am Ende des ersten Jahrs noch leben, das Jahr durchlebt hätten, eben so ist im 2ten Jahre nur die Anzahl A^2, etc. in Rechnung gebracht. Ausserdem lebten aber im Anfange des ersten Jahrs noch Δ A Personen, welche succesſiv in demselben Jahre abgingen; eben so lebten im Anfange des 2ten Jahrs noch Δ A^1 Personen, welche im Laufe des Jahrs verstarben, etc. Jeder Abgang erfolgte succesſiv im ganzen Jahre, und man kann daher annehmen, dass die in jedem Jahre abgegangenen

Personen, im Durchschnitt genommen, noch die Hälfte des Jahrs durchlebt haben. Diese im Ganzen noch durchlebte Zeit ist also zusammengenommen = $\frac{1}{2}(\Delta A + \Delta A^1 + \Delta A^2 + \ldots + \Delta A^{\underline{x}}) = \frac{1}{2} A$, und wenn auch diese Zeit durch die Anzahl der anfänglich lebenden Personen A dividirt wird, so erhält man zum Quotienten $\frac{1}{2}$, welches also zu dem vorhin gefundenen mittlern Alter noch hinzugelegt werden muſs. Diese so bestimmte Lebensdauer heiſst die *corrigirte mittlere Lebensdauer*.

§. 61.

Die mittlere Lebensdauer ohne Correction ist, wie angeführt, =

$$\frac{1}{A}(\Delta A^{\underline{1}} + 2\,\Delta A^{\underline{2}} + 3\,\Delta A^{\underline{3}} + \ldots + \overline{x-1}\,\Delta A^{\underline{x-1}}),$$

wobey das Glied $x\,\Delta A^{\underline{x}}$, welches = 0 ist, weggelaſsen worden. Wenn nun das *Absterben gleichmäſsig* erfolgte, und also die Decremente gleich wären, so wäre $\Delta A^1 + 2\,\Delta A^2 + 3\,\Delta A^3 + \ldots + \overline{x-1}\,\Delta A^{\underline{x-1}} = \frac{\overline{x-1}\,.\,x}{2}\Delta A$, also die mittlere Lebensdauer $= \frac{\overline{x-1}\,.\,x\,\Delta A}{2\;\;A}$, und da bey dieser Voraussetzung $A = x\,\Delta A$ ist, (§. 57) so wird $\frac{\overline{x-1}\,.\,x\Delta A}{2\;\;A} = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Addirt man hierzu die Correction von $\frac{1}{2}$, so erhält man in diesem

Falle die mittlere Lebensdauer $= \frac{1}{2}$, d. h. gleich der Hälfte der Alterergänzung. Wenn also das Absterben gleichmäſsig geschähe, so wären die wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer gleich, sonst können sie nicht durchgängig für jedes Alter gleich seyn.

Anm. Im Ganzen genommen ist nach den Tabellen die wahrscheinliche Lebensdauer in den frühern Jahren gröſser, in den höhern Lebensjahren aber kleiner als die mittlere Lebensdauer.

§. 62.

Am bequemsten findet man die mittlere Lebensdauer auf folgende Art. Man schreibt die Zahlen der Lebenden nach der Mortalitätstabelle für jedes Jahr von 0 an bis zum höchsten Lebensziel unter einander, summirt dann sämmtliche Zahlen von unten an, und setzt die Summe für je n Glieder von unten zur Zeite jedes nten Gliedes von unten, wodurch man die Summe der Lebenden für jede Anfangszahl, d. h. $\int A'^2$ für jedes a, erhält. Sucht man nun die mittlere Lebensdauer für das Alter a, so nimmt man die Summe, welche bey dem Jahre $\overline{a+1}$ steht, und dividirt dieselbe mit der Zahl der Lebenden vom Alter a, d. h. mit A, wodurch man also $\frac{\int A'^1}{A}$ erhält. Hierzu legt man dann noch $\frac{1}{2}$, um die corrigirte mittlere Lebensdauer zu bekommen.

Anm. 1. Eine so eingerichtete Tabelle findet man nach der Süfsmilchschen Sterbensordnung bey Tetens am a. O. S. 89, nach Deparcieux's Sterbensordnung in *K. Ch. Langdorfs arithmetischen Abhandlungen etc. über juristische und staatswirthschaftliche Fragen etc., Heidelberg* 1810, S. 171 etc. Letztere ist jedoch vom 54sten Jahre an unrichtig summirt.

Anm. 2. Die Zeit des *mittlern Abgestorbenseyns* könnte man nennen den Durchschnitt der Zeiten von dem Augenblick an, wo die Personen eines gegebenen Alters absterben, bis zum Ablauf der Altersergänzung. Diese mittlere Zeit ist also = x — Ea, wenn nämlich x die Ergänzung für das Alter a und Ea die mittlere corrigirte Lebensdauer ist. Tetens hat diesen Werth zuweilen gebraucht; ich habe aber nicht nöthig gefunden, ihn irgendwo den Berechnungen zum Grunde zu legen.

Da übrigens das Absterben nach jeder Sterbensordnung succefsiv und theilweise geschieht, so bestehen auch für die ganze Gesellschaft der Personen A die mittlere Lebensdauer und die Zeit des Abgestorbenseyns nicht nach einander, sondern neben einander.

Drittes Kapitel.

Von unveränderlichen Leibrenten.

---

§. 63.

Von einer Anzahl A von Personen des Alters a leben zufolge der angenommenen Bezeichnung am

Schlufse des ersten Jahrs $A^{\underline{1}}$, am Ende des zweiten Jahrs $A^{\underline{2}}$, am Ende des dritten Jahrs $A^{\underline{3}}$ etc., so wie überhaupt zu Ausgang des nten Jahrs $A^{\underline{n}}$. Soll nun jede am Schlufse des Jahrs lebende Person jedesmal am Ende desselben eine Rente 1 erhalten, so ist die Summe dieser Renten, ohne Rücksicht auf die Zeit, worin sie bezahlt werden, $= A^{\underline{1}} + A^{\underline{2}} + A^{\underline{3}} + .. + A^{\underline{x}}$. Da indefsen die erste Rente zu Ausgang des ersten Jahrs, die zweite zu Ausgang des zweiten Jahrs, so wie überhaupt jede nte Rente zu Ausgang des nten Jahrs bezahlt, auch jedes Jahrs Zahlung auf den Anfangstermin discontirt werden mufs, so ist der gegenwärtige Werth aller zuzahlendenRenten $= \frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + .. + \frac{A^{\underline{x}}}{r^x}$, und weil dieser Werth von der ganzen Anzahl A der Personen aufgebracht werden soll, so ist der Einsatz für jeden Einzelnen, d. h. der Werth der Rente 1 für das Alter a, $= \frac{1}{A}\left[\frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + .. + \frac{A^{\underline{x}}}{r^x}\right]$, welcher Werth auch durch $\frac{1}{A}\int\frac{A'^{\underline{1}}}{r^{1}}$ ausgedruckt werden kann. Dieser Werth der Leibrente, nämlich der gegenwärtige Werth des Rententhalers 1, der jedesmal am Ende des Jahrs an die Person vom anfänglichen Alter a, sofern sie dann noch lebt, bezahlt wird, soll künftig mit λa bezeichnet werden, so dafs also $\lambda a = \frac{1}{A}\int\frac{A'^{1}}{r^{1}}$ ist.

Anm. Man muſs aber nicht unbeachtet laſsen, daſs, da hier nur ganze Jahre in Betracht gekommen sind, die Renten jedes Jahrs nur für diejenigen Personen berechnet werden, welche am Schluſse des Jahrs noch leben, nicht aber für diejenigen, die im Laufe deſselben verstorben sind.

§. 64.

Anstatt den Werth der Leibrente durch die Zahlen der Lebenden zu bestimmen, kann man denselben auch durch die Decremente ausdrucken. Es ist nämlich $\int \frac{A^{,1}}{r^{1}} = \frac{A^{1}}{r^{1}} + \frac{A^{2}}{r^{2}} + \frac{A^{3}}{r^{3}} + \ldots + \frac{A^{x}}{r^{x}}$; folglich hat man $(r-1)\int \frac{A^{,1}}{r^{1}} =$

$$\frac{A^{1}}{r^{0}} + \frac{A^{2}}{r^{1}} + \frac{A^{3}}{r^{2}} + \ldots + \frac{A^{x}}{r^{x-1}}$$

$$- \frac{A^{1}}{r^{1}} - \frac{A^{2}}{r^{2}} - \ldots - \frac{A^{x-1}}{r^{x-1}} - \frac{A^{x}}{r^{x}},$$

oder auch, wenn man in der obern Reihe $A - \Delta A$ anstatt A^{1}, $A^{1} - \Delta A^{1}$ anstatt A^{2} etc. setzt, auch in dieser Reihe am Ende noch $\frac{A^{x} - \Delta A^{x}}{r^{x}}$, welches $= 0$ ist, hinzufügt, $(r-1)\int \frac{A^{,1}}{r^{1}} =$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A - \Delta A}{r^{0}} + \frac{A^{1} - \Delta A^{1}}{r} + \frac{A^{2} - \Delta A^{2}}{r^{2}} + \ldots \\ \quad - \frac{A^{1}}{r^{1}} - \frac{A^{2}}{r^{2}} + \ldots \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{A^{x} - \Delta A^{x}}{r^{x}} \\ -\dfrac{A^{x}}{r^{x}} \end{array}\right. = A - \left(\frac{\Delta A^{0}}{r^{0}} + \frac{\Delta A^{1}}{r^{1}} + \frac{\Delta A^{2}}{r^{2}} + \ldots\right.$$

$+\left.\dfrac{\Delta A^{x}}{r^{x}}\right)$, wofür man $A - \int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}$ schreiben kann.

Also wird $\int \dfrac{A^{,1}}{r^{1}} = \dfrac{1}{r-1}\left(A - \int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}\right)$ oder $=$ $p\left(A - \int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}\right)$, und $\lambda a = \dfrac{p}{A}\left(A - \int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}\right) =$ $p\left(1 - \dfrac{1}{A}\int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}\right)$.

Anm. Man kann sich auch vorstellen, dafs der Uebernehmer gleich im Anfange für jeden Rentenier ein Grundkapital p erhält, wovon er jährlich an Jeden die Rente 1 zahlt, zugleich aber das Grundkapital für diejenigen, die im Laufe des Jahrs nach den Tabellen absterben, zurückgiebt. Da nun dieser Abgang in den verschiedenen Jahren ΔA, ΔA^{1}, ΔA^{2} etc. bis ΔA^{x-1} ist, so hat der Uebernehmer in den verschiedenen Jahren zurückzuzahlen $p\,\Delta A$, $p\,\Delta A^{1}$, $p\,\Delta A^{2}$ etc. bis $p\,\Delta A^{x-1}$, wovon, weil die in jedem Jahre Absterbenden für dasselbe Jahr keine Rente erhalten sollen, und also $p\,\Delta A$ sofort im Anfange des ersten Jahrs, $p\,\Delta A^{1}$ im Anfange des zweiten, u. s. w. zurückzuzahlen ist, der gegenwärtige Werth

$$= p\,\frac{\Delta A}{r^{0}} + p\,\frac{\Delta A^{1}}{r^{1}} + p\,\frac{\Delta A^{2}}{r^{2}} + \ldots + p\,\frac{\Delta A^{x-1}}{r^{x-1}} =$$

$p \int \dfrac{\Delta A^{0}}{r^{0}}$ wird. Was also dem Uebernehmer für sämmtliche

Rentenirer zu zahlen wäre, ist $= pA - p\int\frac{\Delta A^0}{r^0}$, welches für jeden einzelnen Rentenempfänger beträgt $p - \frac{1}{A}p\int\frac{\Delta A^0}{r^0}$, wie vorher.

§. 65.

Wollte man, um die Rechnung mit noch kleinern Zahlen zu führen, die Differenzen der Decremente gebrauchen, so könnte dies auf folgende Weise geschehen. Es ist $\int\frac{\Delta A^0}{r^0} = \frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{\Delta A^1}{r} +$

$$\frac{\Delta A^2}{r^2} + \ldots + \frac{\Delta A^{\overline{x}}}{r^x}, \text{ folglich } (1 - \frac{1}{r})\int\frac{\Delta A^0}{r^0} =$$

$$\frac{\Delta A}{r^0} + \frac{\Delta A^1}{r} + \frac{\Delta A^2}{r^2} + \ldots + \frac{\Delta A^{\overline{x}}}{r^x}$$

$$- \frac{\Delta A}{r} - \frac{\Delta A^1}{r^2} - \ldots - \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{r^x} - \frac{\Delta A^{\overline{x}}}{r^{x+1}}.$$

Nun ist, wenn in der obern Reihe $\Delta A - \Delta^2 A$ anstatt ΔA^1, $\Delta A^1 - \Delta^2 A^1$ anstatt ΔA^2 etc. gesetzt, auch das Glied $\frac{\Delta A^{\overline{x}} - \Delta^2 A^{\overline{x}}}{r^{x+1}} = 0$ hinzufügt wird, $(1 - \frac{1}{r})\int\frac{\Delta A^0}{r^0} =$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{\Delta A^1 - \Delta^2 A^0}{r} + \frac{\Delta A^1 - \Delta^2 A^1}{r^2} + \ldots \\ \qquad - \frac{\Delta A}{r} \qquad - \frac{\Delta A^1}{r^2} \qquad - \ldots \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} + \dfrac{\Delta A^{\frac{x}{-}} - \Delta^2 A^{\frac{x}{-}}}{r^x + 1} \\ - \dfrac{\Delta A^{\frac{x}{-}}}{r^x + 1} \end{matrix}\right. = \mathit{\Delta} A - \left(\frac{\Delta^2 A^0}{r^1} + \frac{\Delta^2 A^1}{r^2} + \right.$$

$\dfrac{\Delta^2 A^2}{r^3} + \ldots + \dfrac{\Delta^2 A^{\frac{x}{-}}}{r^x + 1}\Big)$ welches mit

$\mathit{\Delta} A - \dfrac{1}{r} \displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}$ bezeichnet werden kann, und

$\displaystyle\int \dfrac{\Delta A^0}{r^0} = \dfrac{r}{r-1} \left(\mathit{\Delta} A - \dfrac{1}{r} \displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}\right) =$

$p\left(r \mathit{\Delta} A - \displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}\right)$. Hiernach wird λa oder

$p\left(1 - \dfrac{1}{A} \displaystyle\int \dfrac{\Delta A^0}{r^0}\right) = p\left[1 - \dfrac{p}{A}\left(r \mathit{\Delta} A\right.\right.$

$\left.\left. - \displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}\right)\right] = \dfrac{p}{A}\left(A - pr \mathit{\Delta} A + p \displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}\right)$.

Setzt man diese Operation noch weiter fort, so erhält man, $\displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A'^0}{r^0} = p\left(r \mathit{\Delta}^2 A - \displaystyle\int \dfrac{\Delta^3 A^0}{r^0}\right)$, und wenn man diesen letztern Ausdruck anstatt $\displaystyle\int \dfrac{\Delta^2 A^0}{r^0}$ setzt, $\lambda a = \dfrac{p}{A}\left(A - pr \mathit{\Delta} A + p^2 r \mathit{\Delta}^2 A - \right.$ $\left. p^2 \displaystyle\int \dfrac{\Delta^3 A^0}{r^0}\right)$. Eben so erhielte man, wenn man die vierten Differenzen gebrauchen wollte, $\lambda a =$ $\dfrac{p}{A}\left(A - pr \mathit{\Delta} A + p^2 r \mathit{\Delta}^2 A - p^3 r \mathit{\Delta}^3 A + \right.$ $\left. p^3 \displaystyle\int \dfrac{\Delta^4 A^0}{r^0}\right)$.

Anm. Nach der Süfsmilchschen Tabellen sind die Differenzen der Decremente oder die zweiten Differenzen der Hauptreihe gröfstentheils entweder $= 1$ oder $= 0$; in den Wargentinschen und Florencourtschen Tabellen sind die dritten Differenzen wenigstens gröfstentheils kleine Zahlen, und es kann wohl nicht rathsam seyn, die angegebene Operation weiter fortzusetzen, zumal da der Glieder immer mehr [so weit nämlich nicht einzelne wegfallen,] und die Potenzen von p immer gröfser werden. Sonst sieht man leicht, dafs wenn man die nten Differenzen gebrauchen wollte, der allgemeine Ausdruck wäre

$$\lambda a = \frac{p}{A}(A - pr\Delta A + p^2r\,\Delta^2 A - p^3r\Delta^3 A + \ldots$$

$$\pm\, p^{n-1}\, r\, \Delta^{n-1} A \mp p^{n-1} \int \frac{\Delta^n A^0}{r^0})$$ wobey die Glieder, welche die Differenzen mit geradem Index enthalten, bejaht, mit ungeradem aber verneint sind.

Uebrigens mufs man dabey nicht aufser Acht lafsen, dafs wo die Differenzen nach den Tabellen verneint sind, ihre Producte mit dem entgegengesetzten Zeichen in Rechnung gebracht werden müfsen.

§. 66.

Wenn viele Leibrenten-Werthe nach derselben Mortalitätstafel und dem nämlichen Zinsfufs berechnet werden sollen, so kann man mit Vortheil dasselbe Verfahren anwenden, das vorher zur Berechnung der mittlern Lebensdauer empfohlen ist. Man multiplicirt nämlich die Zahlen der Lebenden der Mortalitätstafel vom Jahre 0 an bis zum höchsten Lebensziele der Reihe nach mit $\frac{1}{r^0}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$

etc., wonach also die Zahl der Lebenden für das Alter von n Jahren mit $\frac{1}{r^n}$ multiplicirt wird, und schreibt diese Producte, d. i. die *discontirten Zahlen der Lebenden*, der Reihe nach unter einander. Demnächst summirt man dieselben von unten und setzt jedesmal die Summe von n Producten von unten an zur Seite des nten Products von unten. Noch fügt man zu mehrerer Bequemlichkeit vorne in der Tabelle die Jahre des Alters hinzu. Um nun die Leibrente für das Alter a zu finden, darf man nur die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden, so wie sie bey dem Alter $\overline{a+1}$ steht, mit der bey dem Alter a angeführten discontirten Zahl der Lebenden dividiren. Es ist nämlich, wenn A die Anfangszahl in der Mortalitätstabelle für das Alter a ist, die Summe der Producte bey dem Alter $\overline{a+1} =$

$$\frac{A^{1}}{r^{a+1}} + \frac{A^{2}}{r^{a+2}} + \frac{A^{3}}{r^{a+3}} + \ldots + \frac{A^{x}}{r^{a+x}} =$$

$$\frac{1}{r^a}\left(\frac{A^{1}}{r} + \frac{A^{2}}{r^2} + \frac{A^{3}}{r^3} + \ldots + \frac{A^{x}}{r^x}\right) = \frac{1}{r^a}\int\frac{A'^{1}}{r^{1}},$$

und da das bey dem Alter a aufgeführte Product $=$ $\frac{A}{r^a}$ ist, so erhält man $\frac{1}{r^a}\int\frac{A'^{1}}{r^{1}} : \frac{A}{r^a} =$ $\frac{1}{A}\int\frac{A'^{1}}{r^{1}} = \lambda a$, wie oben.

Anm. Eine Tabelle dieser Art nach der Süfsmilchschen Sterblichkeitstafel und dem Zinsfuſse von 4 Procent findet man bey Tetens a. a. O. S. 89, zugleich mit der vorhin er-

wähnten Tabelle zur Berechnung der Lebensdauern. Herr Brune hat in seiner *Berechnung der Lebensrenten* etc., aufser dieser nach Süfsmilchs Sterbensordnung verfertigten Tabelle, Seite 235 noch eine andre nach der Wargentinschen Sterblichkeitstafel für das männliche Geschlecht geliefert.

Herr Morgan empfiehlt in seinen Principles etc. S. 29, als vorher ganz unbekannt und von ihm erst erfunden, eine Methode zur Berechnung der Leibrenten, oder eigentlich zur Prüfung dieser Berechnungen, welche Methode auf den ersten Anblick von der vorhin angegebenen verschieden zu seyn scheint, jedoch im Wesentlichen damit zusammenfällt. Diese Methode beruhet, nach der im gegenwärtigen Werke gebrauchten Bezeichnung, allgemein ausgedruckt, auf folgender Gleichung:

$$\frac{A^{\overline{n}}}{Ar^{n}} \lambda \overline{a+n} = \frac{A^{\overline{n+1}}}{Ar^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{Ar^{n+2}} + \ldots + \frac{A^{\overline{x}}}{Ar^{x}}.$$

Wenn in dieser Gleichung auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens alle Glieder berechnet werden und die Summe derselben $= \frac{A^{\overline{n}}}{Ar^{n}} \lambda \overline{a+n}$ ist, so ist dies ein Beweis, dafs der Werth von $\lambda \overline{a+n}$ richtig sey. Dabey nimmt Herr Morgan für A beständig die Fundamentalzahl der Mortalitätstabelle, wo also $a = o$ und $\lambda \overline{a+n} = \lambda n$ wird.

Aus der angegebenen Gleichung erhält man $\lambda \overline{a+n}$ $= \left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \ldots + \frac{A^{\overline{x}}}{r^{x}}\right) : \frac{A^{\overline{n}}}{r^{n}}$, und wenn man $a = o$ setzt, wo dann A die Fundamentalzahl der Tabelle, imgleichen $A^{\overline{n}}$ die Zahl der Lebenden vom Alter n etc. ausdruckt, so hat man $\lambda n = \left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \ldots\right.$

$+ \frac{\overset{x}{A}}{r^x}) : \frac{\overset{n}{A}}{r^n}$. Diese Methode also, welche Herr Morgan sonst nirgend gefunden hat, besteht darin, dafs man, um die Leibrente für das Altersjahr n zu erhalten, die discontirten Zahlen der Lebenden vom Altersjahre $\overline{n + 1}$ an bis zum höchsten Lebensziele summirt und diese Summe mit der discontirten Zahl der Lebenden vom Alter n dividirt, wobey man noch die von Morgan verlangte Arbeit, diese discontirten Zahlen der Lebenden durch die Fundamentalzahl in der Sterblichkeitstafel zu dividiren, sparen kann.

Anm. 2. Es giebt noch eine andre Formel zur Berechnung der Leibrenten, welche ich der Vollständigkeit wegen hierher setze. Es ist nämlich λa oder

$$\frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{A^2}{r^2} + \frac{A^3}{r^3} + \ldots\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{A - \Delta A}{r} + \frac{A - \Delta A - \Delta A^1}{r^2} + \frac{A - \Delta A - \Delta A^1 - \Delta A^2}{r^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(A \int \frac{1'^1}{r^1} - \Delta A \int \frac{1'^1}{r^1} - \Delta A^1 \int \frac{1'^2}{r^2} - \Delta A^2 \int \frac{1'^3}{r^3} - \ldots\right) = \int \frac{1'^1}{r^1} - \frac{1}{A}\left(\Delta A \int \frac{1'^1}{r^1} + \Delta A^1 \int \frac{1'^2}{r^2} + \Delta A^2 \int \frac{1'^3}{r^3} + \ldots\right),$$

wo die Summen $\int \frac{1'^1}{r^1}, \int \frac{1'^2}{r^2}, \int \frac{1'^3}{r^3}$ etc. mit $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$ anfangen und sämtlich bis $\frac{1}{r^x}$ fortgehen. Anstatt dessen hat man auch $\lambda a = \frac{1}{A}\left(\Delta A^1 \int \frac{1}{r^1} + \Delta A^2 \int \frac{1}{r^2} + \Delta A^3 \int \frac{1}{r^3} + \ldots\right)$,

wo alle Summen mit $\frac{1}{r}$ anfangen und mit dem bezeichneten Gliede aufhören. Nach diesen Formeln liefse sich auch eine Hülfstabelle zur Berechnung der Leibrenten einrichten; indefsen wäre diese Tabelle nicht von so ausgebreitetem Nutzen als die oben gedachte über die discontirten Zahlen der Lebenden, die auch bey den Verbindungsrenten mit mehrerem Vortheil zu gebrauchen ist.

§. 67.

Bisher ist angenommen, dafs die Leibrente am Ende des Jahrs, und zwar an diejenigen, die dann noch leben, bezahlt werde. Soll sie aber auch für diejenigen bezahlt werden, die zwar am Ende des Jahrs verstorben sind, aber einen gewifsen Theil desselben noch durchlebt haben, so wird der Werth der Rente gröfser ausfallen müfsen.

Wollte man nun, um eine späterhin mehrmals vorkommende Gröfse vorläufig zu bestimmen, annehmen, dafs für jeden Abgehenden, am Ende des Jahrs, worin er stirbt, noch einmal ein voller Rententhaler bezahlt werden sollte, so würden, wenn die Personen anfänglich vom Alter a sind, diese Rententhaler auszuzahlen seyn am Ende des ersten Jahrs für ΔA Personen, am Ende des zweiten Jahrs für ΔA^{1}, des dritten für ΔA^{2} etc., so wie am Ende des xten Jahrs für $\Delta A^{\overline{x-1}}$. Wenn die Zahlung jedes Jahrs auf den Anfangstermin discontirt und über alle Interefsenten vertheilt wird, so ist der baa-

re Werth für jeden Einzelnen $= \frac{1}{A} (\frac{\Delta A}{r} +$

$$\frac{\Delta A^1}{r^2} + \frac{\Delta A^2}{r^3} + \ldots + \frac{\Delta A^{x-1}}{r^x}) = \frac{1}{Ar} \int \frac{\Delta A^0}{r^0}.$$

Diese Gröfse, nämlich der gegenwärtige Werth eines Thalers, welcher für jede Person vom anfänglichen Alter a am Ende des Jahrs, worin sie stirbt, bezahlt wird, soll künftig der Kürze wegen mit ϑa bezeichnet werden. Es izt dies der Werth des Sterbethalers, wenn er am Ende des Jahrs worin der Todesfall eintritt bezahlt werden soll.

Uebrigens findet man den Werth der gedachten Gröfse auch aus der Leibrente. Es ist nämlich nach

$$\text{§. 65. } \lambda a = p - p \frac{1}{A} \int \frac{\Delta A^0}{r^0} = p - pr\, \vartheta a,$$

und folglich ist $\vartheta a = \frac{p - \lambda a}{pr} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}.$

§. 68.

Wenn die Rente für diejenigen, welche im Laufe jedes Jahrs abgehen, nur auf einen gewifsen Theil der Zeit beschränkt ist, und angenommen wird dafs das Absterben, innerhalb eines jeden Jahrs für sich, gleichmäfsig geschehe, so läfst sich der Werth dieser Zahlung nach dem Vorhergehenden leicht bestimmen. Sollen nämlich nur alle diejenigen, welche ein halbes Jahr durchleben, noch eine halbjährige Hebung geniefsen, so leben in der Mitte des ersten Jahrs

von den in diesem Jahre abgehenden Personen noch $\frac{1}{2}\,\Delta A$, in der Mitte des zweiten Jahrs $\frac{1}{2}\,\Delta A^1$, des dritten $\frac{1}{2}\,\Delta A^2$, etc., und da jeder nur eine halbjährliche Rente bezieht, so erhalten sie zusammen nach und nach $\frac{1}{4}\,\Delta A + \frac{1}{4}\,\Delta A^1 + \frac{1}{4}\,\Delta A^2 + \ldots$, welches, auf den Anfangstermin discontirt und über alle Interessenten vertheilt, $= \frac{1}{4A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta A^1}{r^2} + \frac{\Delta A^2}{r^3} + \ldots\right) = \frac{1}{4}\,\vartheta a$ ist.

Sollten auch Vierteljahre mitgerechnet und dafür die Renten an die in jedem Jahre Abgehenden bezahlt werden, so leben am Ende des ersten Quartals im ersten Jahre $\frac{3}{4}$ des Decrements, am Ende des zweiten Quartals $\frac{2}{4}$, und am Ende des dritten Quartals $\frac{1}{4}$, und da für jeden Abgehenden jedesmal $\frac{1}{4}$ der Rente bezahlt wird, so beträgt dies $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)\Delta A = \frac{3}{8}\,\Delta A$; eben so für das zweite Jahr $\frac{3}{8}\,\Delta A^1$, für das dritte Jahr $\frac{3}{8}\,\Delta A^2$ etc. Der gegenwärtige Werth aller dieser Zahlungen, über alle Interessenten vertheilt, ist $= \frac{3}{8A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta A^1}{r^2} + \frac{\Delta A^2}{r^3} + \ldots\right) = \frac{3}{8}\,\vartheta a$.

Sollten überhaupt die Renten für die, welche im Laufe des Jahrs absterben, auf jedes $\frac{1}{n}$, das sie noch durchleben, berechnet und mit $\frac{1}{n}$ für jeden

Zeittheil jedoch wieder am Ende des Jahrs bezahlt werden, so beträgt dies für das erste Jahr

$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \varDelta A + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \varDelta A + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \varDelta A + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \varDelta A = \frac{n-1 \cdot n}{2 n^2} \varDelta A = \frac{n-1}{2 n} \varDelta A$; eben so für das zweite Jahr $\frac{n-1}{2 n} \varDelta A^1$ etc. Wenn Alles auf den Anfangstermin discontirt und über alle Interessenten vertheilt wird, so ist der baare Werth $= \frac{n-1}{2 n} \vartheta a$. Setzt man aber $n = \infty$, d. h. wird die Rente für jeden kleinsten Theil der Zeit bezahlt, so wird der Werth $= \frac{1}{2} \vartheta a$.

Dies ist also die Gränze für das, was zu dem Werthe der Leibrente, so wie sie vorher bestimmt worden, noch zuzulegen ist, wie klein $\frac{1}{n}$ auch angenommen werden mag, und der vollständige Werth der Leibrente, die am Ende des Jahrs sowohl an diejenigen Interessenten, die dann noch leben, als für diejenigen, die im Laufe des Jahrs verstorben sind, jedoch nur bis zum Todestage, bezahlt werden soll, ist $= \lambda a + \frac{1}{2} \vartheta a$. Da übrigens, wie im §. 67. bemerkt, $\vartheta a = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{p r}$, so hat man den Werth dieser Leibrente $= \lambda a + \frac{1}{2 r} - \frac{\lambda a}{2 p r} = (1 - \frac{1}{2 p r}) \lambda a + \frac{1}{2 r}$. Sonst

ist auch noch $\lambda a + \frac{1}{2}\,\vartheta a = \frac{A^1 + \frac{1}{2}\Delta A}{Ar} + \frac{A^2 + \frac{1}{2}\Delta A^1}{r^1} + \ldots + \frac{A^x + \frac{1}{2}\Delta A^{x-1}}{r^x} = \frac{1}{2}\left(\frac{A + A^1}{Ar} + \frac{A^1 + A^2}{Ar^2} + \ldots + \frac{A^{x-1} + A^x}{Ar^x}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}}{A}\,\lambda\,\overline{a - 1} + \lambda a\right).$

§. 69.

Wenn aber die Leibrente nicht auf einmal am Ende des Jahrs, sondern in *Terminen während desselben*, und zwar so, daſs die Theile der Rente den abgelaufenen Theilen des Jahrs proportional sind, bezahlt werden soll, so müſsen von den in jedem Jahre vorfallenden Terminen noch die Zinsen bis zu Ende des Jahrs in Rechnung kommen.

Soll also zuerst die Rente *halbjährlich* bezahlt werden, so bekommen diejenigen, welche jedesmal das ganze Jahr durchleben, jeder einen halben Rententhaler in der Mitte des Jahrs und einen halben Thaler am Ende deſselben. Der baare Werth des letztern auf alle Jahre ist für jeden Einzelnen $= \frac{1}{2}\,\lambda a$, des erstern aber, da die Zahlung an sich eben so groſs ist, durchgängig aber ein halbes Jahr früher geschieht, $= \frac{1}{2}\,r^{\frac{1}{2}}\,\lambda a$, also beides zusammen $= \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + 1)\,\lambda a$.

Auſserdem bekommen noch diejenigen, welche in den verschiedenen Jahren abgehen, aber in der

Mitte desselben noch leben, nämlich successiv $\frac{1}{2}\,\Delta A$, $\frac{1}{2}\,\Delta A^{1}$, $\frac{1}{2}\,\Delta A^{2}$ etc., in diesem Termin, jeder in seinem Sterbejahre, einen halben Rententhaler. Geschähe diese Zahlung jedesmal am Ende des Jahrs, so würde ihr Werth auf alle Jahre für jeden Einzelnen $= \frac{1}{4}\,\vartheta a$, da sie zwar an sich selbst eben so groſs bleibt, aber ein halbes Jahr früher fällig wird, so ist der Werth $= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4}\,\vartheta a$.

Beides zusammengenommen giebt den Werth der halbjährlich zahlbaren Leibrente $=$

$$\frac{r^{\frac{1}{2}} + 1}{2} \cdot \lambda a + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4}\,\vartheta a.$$

Für $r = 1{,}04$ wird dieser Werth $=$ $\frac{2{,}019804}{2}\,\lambda a + 0{,}254951\,\vartheta a = 1{,}009802\,\lambda a +$ $0{,}254951\,\left(\frac{1}{1{,}04} - \frac{\lambda a}{26}\right) = 1{,}000096 \cdot \lambda a +$ $0{,}245146$, sehr nahe $= \lambda a + \frac{1}{4}$. Für $r = 1{,}05$ erhält man auf dieselbe Weise den Werth $=$ $1{,}000149 \cdot \lambda a + 0{,}243977$, also wieder nahe $\lambda a + \frac{1}{4}$.

Sollen die Termine der Zahlung *vierteljährlich* seyn, so bekommen

diejenigen, welche jedesmal das ganze Jahr durchleben, am Schlusse jedes Quartals $\frac{1}{4}$ des Rententhalers. Reducirt man diese Termine auf den Anfang des Jahrs, so ist der Werth derselben überhaupt $= \frac{r^{\frac{3}{4}} + r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}} + 1}{4}\,\lambda a$.

Ferner sind zu zahlen an die im Laufe jedes Jahrs Abgehenden drey Termine, nämlich $\frac{1}{4}$ Thaler am Ende des ersten Quartals an diejenigen drey Viertheile des Decrements, die dann noch leben, $\frac{1}{4}$ am Ende des zweiten Quartals an die noch lebende Hälfte des Decrements, und $\frac{1}{4}$ am Ende des dritten Quartals an das dann noch lebende letzte Viertheil. Werden auch diese Zahlungen auf den Anfang des Jahrs zurückgeführt, so betragen sie zusammen

$$\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4}\, r^{\frac{3}{4}}\, \vartheta a + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}\, r^{\frac{1}{2}}\, \vartheta a + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4}\, r^{\frac{1}{4}}\, \vartheta a = \frac{3\, r^{\frac{3}{4}} + 2\, r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}}}{16}\, \vartheta a.$$

Beide Theile zusammengenommen geben also den Werth der vierteljährlich zahlbaren Leibrente =

$$\frac{r^{\frac{3}{4}} + r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}} + 1}{4}\, \lambda a + \frac{3\, r^{\frac{3}{4}} + 2 r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}}}{16}\, \vartheta a.$$

Für $r = 104$ erhält man diesen Werth $= 1{,}014877\ \lambda a + 0{,}383688\ \vartheta a = 1{,}014877\ \lambda a + 0{,}383688 \left(\frac{1}{1{,}04} - \frac{\lambda a}{26}\right) = 1{,}000120\ \lambda a + 0{,}368931$, oder beinahe $= \lambda a + \frac{3}{8}$. Für $r = 1{,}05$ hat man den obigen Ausdruck $= 1{,}018559\ \lambda a - 0{,}385842\ \vartheta a$

$$= 1{,}018559\ \lambda a + 0{,}385842 \left(\frac{1}{1{,}05} - \frac{\lambda a}{21}\right)$$

$= 1{,}000186\ \lambda a + 0{,}367468$, ebenfalls wieder nahe $\lambda a + \frac{3}{8}$.

§. 70.

Soll die Leibrente überhaupt in n Terminen des Jahrs jedesmal mit $\frac{1}{n}$ bezahlt werden, so ist aus den vorhergehenden Gründen zu berechnen: zuerst dasjenige, was jedesmal die das ganze Jahr hindurch lebenden Interefsenten erhalten. Da nun jede terminliche Zahlung $= \frac{1}{n}$ der jährlichen Rente beträgt, auch wenn sie $\frac{m}{n}$ vor Ablauf des Jahrs fällig ist, mit $r^{\frac{m}{n}}$ multiplicirt werden mufs, so ist der gegenwärtige Werth dieses Theils der Rente auf alle Jahre für jeden Einzelnen =

$$\frac{1}{n}\left(r^{\frac{n-1}{n}} + r^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1\right) \lambda a$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \lambda a.$$

Ferner ist zu berechnen, was diejenigen, welche im Laufe aller Jahre abgehen, im Sterbejahre erhalten. Da die Anzahl dieser Interefsenten nach Verlauf von $\frac{1}{n}$ des Jahrs, $= \frac{n-1}{n}$ des jedesmaligen Decrements, nach Verlauf von $\frac{2}{n}$ des Jahrs, $= \frac{n-2}{n}$ des Decrements, überhaupt nach Ver-

lauf von $\frac{m}{n}$ des Jahrs, $= \frac{n-m}{n}$ des Decrements ist, und jede Terminszahlung durch die Multiplication mit $r^{\frac{n-m}{n}}$ auf dem Anfang des Jahrs reducirt werden muſs, so ist der Werth dieser Zahlungen aller Jahre für jeden Einzelnen $=$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\, r^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-2}{n}\, r^{\frac{n-2}{n}} + \dots + \frac{1}{n}\, r^{\frac{1}{n}}\right) \vartheta a = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n-1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{n-2}{r^{\frac{2}{n}}} + \dots + \frac{n-(n-1)}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right) r\, \vartheta a.$$

Hiervon findet man nach der Formel des §. 38., wenn man nämlich in $pa - pr\int\frac{1}{r^a}$ anstatt des dortigen a hier n, anstatt r hier $r^{\frac{1}{n}}$ und anstatt p oder $\frac{1}{r-1}$ hier $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}-1}$ setzt, den Werth

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{r^{\frac{1}{n}}-1} - \frac{r^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}-1}\int\frac{1}{r^{\frac{1}{n}\cdot n}}\right) r\, \vartheta a$$

$$= \left(\frac{1}{n(r^{\frac{1}{n}} - 1)} - \frac{r^{\frac{1}{n}}}{n^2 (r^{\frac{1}{n}} - 1)} \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right) r\, \vartheta a$$

$$= \left(\frac{r}{n(r^{\frac{1}{n}} - 1)} - \frac{r^{\frac{1}{n}} (r - 1)}{n^2 (r^{\frac{1}{n}} - 1)^2} \right) \vartheta a.$$

Durch Zusammenlegung beider Theile erhält man also allgemein den Werth der in n Terminen zahlbaren Leibrente

$$= \frac{r - 1}{n(r^{\frac{1}{n}} - 1)} \lambda a + \left(\frac{r}{n(r^{\frac{1}{n}} - 1)} - \frac{r^{\frac{1}{n}} (r - 1)}{n^2 (r^{\frac{1}{n}} - 1)^2} \right) \vartheta a.$$

Wenn man aber $n = \infty$ setzt, so wird $r^{\frac{1}{n}} = 1$, und $n(r^{\frac{1}{n}} - 1) = \log. \text{nat.}\, r$ (§. 18); folglich erhält man den Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Leibrente $=$

$$\frac{r - 1}{\log. \text{nat.}\, r} \lambda a + \left(\frac{r}{\log. \text{nat.}\, r} - \frac{r - 1}{(\log. \text{nat.}\, r)^2} \right) \vartheta a,$$

oder auch, wenn man wie oben π anstatt $\frac{1}{\log. \text{nat.}\, r}$ und p anstatt $\frac{1}{r - 1}$ setzt, $= \frac{\pi}{p} \lambda a +$

$$\left(\pi r - \frac{\pi^2}{p}\right) \vartheta a.$$

Da ferner $\vartheta a = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}$, so hat man auch $\frac{\pi}{p}\lambda a + \left(\pi r - \frac{\pi^2}{p}\right)\vartheta a = \frac{\pi}{p}\lambda a + \left(\pi r - \frac{\pi^2}{p}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}\right) = \frac{\pi^2}{p^2 r}\lambda a + \pi - \frac{\pi^2}{pr} = \frac{\pi}{pr}\left(\frac{\pi}{p}\lambda a + pr - \pi\right)$.

Für $r = 1{,}04$ ist dieser Ausdruck $= 1{,}000128\,\lambda a + 25{,}496732 - 25{,}003205 = 1{,}000128\,\lambda a - 0{,}493527$, beinahe $\lambda a + \frac{1}{2}$. Für $r = 1{,}05$ wird der gedachte Werth $= 1{,}000205\,\lambda a + 0{,}4919$, also gleichfalls beinahe $\lambda a + \frac{1}{2}$.

Anm. Die im vorhergehenden §. zuerst angegebene Formel gilt allgemein für jeden Werth von n. Für $n = \infty$ fände man das zuletzt angeführte Resultat auch durch die Integralrechnung auf folgende Weise. Wenn die Anzahl der augenblicklichen Termine $= n$ ist und der augenblickliche Termin $= \frac{1}{n}$ der Rente, so ist der Werth defsen was im ersten Jahre zu zahlen ist für jeden Einzelnen:

$$= \frac{1}{An}\left(\frac{A - \frac{1}{n}\Delta A}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{A - \frac{2}{n}\Delta A}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{A - \frac{3}{n}\Delta A}{r^{\frac{3}{n}}} + \dots\right) = \frac{A}{An}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{n}}} + \dots\right)$$

$-\frac{\Delta A}{An}\left(\frac{\frac{1}{n}}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{\frac{2}{n}}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{\frac{3}{n}}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots\right)$. Ist aber $n = \infty$ und wird die verflossene Zeit des Jahrs x genannt, so ist $\frac{1}{n} = dx$, und $\frac{A}{An}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots\right)$ wird $=$

$\frac{A}{A}\int\frac{dx}{r^x}$, so wie $\frac{\Delta A}{An}\left(\frac{\frac{1}{n}}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{\frac{2}{n}}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots\right)$

$= \frac{\Delta A}{A}\int\frac{x\,dx}{r^x}$. Nun ist nach §. 42., wenn nach geschehener Integration $x = 1$ gesetzt wird, $\frac{A}{A}\int\frac{dx}{r^x} =$ $\frac{A}{A}\left(\pi - \frac{\pi}{r}\right) = \frac{A}{A}\,\pi\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{A}{A}\,\frac{\pi}{pr}$.

Ferner ist eben danach $\frac{\Delta A}{A}\int\frac{x\,dx}{r^x} = \frac{\Delta A}{A}\left(\pi^2 - \frac{\pi}{r} - \frac{\pi^2}{r}\right)$ $= \frac{\Delta A}{A}\left(\frac{\pi^2(r-1)}{r} - \frac{\pi}{r}\right) = \left(\frac{\pi^2}{pr} - \frac{\pi p}{pr}\right)\frac{\Delta A}{A}$ $= \frac{\pi}{pr}(\pi - p)\,\frac{\Delta A}{A}$. Folglich wird der Werth der Zahlung des ersten Jahrs $= \frac{\pi}{pr}\,\frac{A}{A} - \frac{\pi}{pr}(\pi - p)\,\frac{\Delta A}{A}$.

Auf ähnliche Weise erhält man den Werth für das zweite Jahr $\frac{\pi}{pr}\,\frac{A^1}{Ar} - \frac{\pi}{pr}(\pi - p)\,\frac{\Delta A^1}{Ar}$ etc. Dies giebt also für alle Jahre den Werth $= \frac{\pi}{pr}\left(\frac{A}{A} + \frac{A^1}{Ar} + \ldots\right)$

$$- \frac{\pi}{pr}(\pi - p)\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta A^1}{Ar} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\pi}{pr}(1 + \lambda a) - \frac{\pi}{p}(\pi - p)\,\vartheta a = \frac{\pi}{pr} +$$

$$\frac{\pi}{pr}\lambda a - \frac{\pi}{p}(\pi - p)\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}\right) = \frac{\pi^2}{p^2 r}\lambda a +$$

$$\frac{\pi}{pr} - \frac{\pi^2}{pr} + \frac{\pi}{r} = \frac{\pi^2}{p^2 r}\lambda a + \pi - \frac{\pi^2}{pr}$$ (indem

$$\frac{\pi}{pr} = \frac{\pi(r-1)}{r} = \pi - \frac{\pi}{r},$$ also $\frac{\pi}{pr} +$

$\frac{\pi}{r} = \pi$).

§. 71.

Will man die Zwischenzinsen für die Rente in jedem Jahre nach dem arithmetischen Verhältnisse berechnen, nämlich für $\frac{m}{n}$ des Jahrs mit $\frac{m}{n}(r - 1)$, so muſs der Werth der Leibrente etwas gröſser ausfallen als er im vorhergehenden §. angegeben worden. Wird dabey angenommen, daſs die Rente in n Terminen fällig werde, so ist die Rechnung folgendermaaſsen zu führen.

Von den Renten, welche an diejenigen Interessenten bezahlt werden, die jedesmal das ganze Jahr hindurch leben, ist der letzte Termin aller Jahre für den Einzelnen $= \frac{1}{n}\lambda a$. Der vorletzte Termin,

der $\frac{1}{n}$ des Jahrs früher bezahlt wird, ist, auf den Anfangstermin reducirt, wenn man der Kürze wegen u anstatt $r - 1$ setzt, $= \frac{1}{n} (1 + \frac{u}{n}) \lambda a$, der nächstvorhergehende Termin $= \frac{1}{n} (1 + \frac{2u}{n}) \lambda a$ etc. der erste Termin aller Jahre $= \frac{1}{n} (1 + \frac{n-1}{n} u) \lambda a$. Also wird der gesammte Werth dieses Theils der Rente $=$

$$\frac{1}{n} [1 + (1 + \frac{u}{n}) + (1 + \frac{2u}{n}) + \ldots + (1 + \frac{n-1}{n})] \lambda a = \frac{1}{n} [n + \frac{u}{n}(1 + 2 + \ldots + \overline{n-1})] \lambda a = (1 + \frac{n-1}{2n} u) \lambda a.$$

Ferner ist die Anzahl der im Laufe jedes Iahrs Abgehenden, welche den ganzen Termin durchlebt haben, im letzten Termin $= 0$, im vorletzten Termin $= \frac{1}{n}$ des Decrements, im nächstvorhergehenden Termin $= \frac{2}{n}$ des Decrements etc., im ersten Termin jedes Iahrs $= \frac{n-1}{n}$ des Decrements, und jeder dieser Interessenten bekömmt in jedem Termin $\frac{1}{n}$ der Iahrrente. Der letzte zahlbare Termin, der $\frac{1}{n}$ vor Ablauf des Iahrs bezahlt wird, ist $= \frac{1}{n^2} (1 + \frac{u}{n}) \vartheta a$; der vorletzte Termin wird $= \frac{2}{n^2} (1 + \frac{2u}{n}) \vartheta a$ etc.; der erste Termin al-

ler Jahre $= \frac{n-1}{n^2}\left(1 + \frac{n-1}{n}u\right)\vartheta a$. Alle Termine zusammengenommen betragen also

$$\left[\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{u}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\left(1+\frac{2u}{n}\right)+\ldots + \frac{n-1}{n^2}\left(1+\frac{n-1}{n}u\right)\right]\vartheta a = \frac{1}{n^2}\left(1+2+\ldots+\overline{n-1}\right)\vartheta a + \frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\ldots+\overline{n-1}^2\right)u\vartheta a$$

$$= \frac{n-1}{2n}\vartheta a + \frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{2n-1}}{2.\,3.\,n^2}u\,\vartheta a.$$

Folglich ist der gesammte Werth dieser Rente

$$= \left(1+\frac{n-1}{2n}u\right)\lambda a + \left(\frac{n-1}{2n} + \frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{2n-1}}{2\,.\,3\,.\,n^2}u\right)\vartheta a.$$

Setzt man aber $n = \infty$ und restituirt $r - 1$ für u, so erhält man hienach den Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Leibrente $=$

$$\left(1+\frac{r-1}{2}\right)\lambda a + \left(\frac{1}{2}+\frac{r-1}{3}\right)\vartheta a = \left(1+\frac{r-1}{2}\right)\lambda a + \left(\frac{1}{2}+\frac{r-1}{3}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{\lambda a}{pr}\right) = \left(1+\frac{1}{2p}-\frac{1}{2pr}-\frac{r}{3p^2r}\right)\lambda a + \frac{1}{2r}+\frac{r-1}{3r} = \left(1+\frac{1}{6p^2r}\right)\lambda a + \frac{1}{3}+\frac{1}{6r}.$$

Für $r = 1{,}04$ wird dieser Ausdruck $= 1{,}000256\,\lambda a + 0{,}493589$; für $r = 1{,}05$ aber wird der Werth $= 1{,}000396\,\lambda a + 0{,}492062$, wieder in beiden Fällen nahe $\lambda a + \frac{1}{2}$.

Anm. 1. Tetens giebt in seiner Berechnung der Leibren-

ten etc. den Werth der hier bestimmten Leibrente an $= \lambda a + \frac{1}{2} - \frac{1}{3p}\,\vartheta a$; dies ist aber nicht richtig. Tetens setzt nämlich die Summe der Quadrate von 1 bis $n - 1 = \frac{\overline{n-1}.n.\overline{n+1}}{2.3}$; sie ist aber $= \frac{\overline{n-1}.n.\overline{2n-1}}{2.3}$. Wenn man diesen Fehler berichtigt, so erhält man aus Tetens Berechnung den Werth der Leibrente $= \lambda a + \frac{1}{2} - \frac{r-1}{6}\,\vartheta a$. Da $\frac{r-1}{6}\,\vartheta a$ oder $\frac{r}{6p}\,\vartheta a = \frac{1}{6pr} - \frac{1}{6p^2r}\,\lambda a$, so hat man hieraus den oben angeführten Werth.

Anm. 2. Nach den vorhergehenden beiden §. §. kann man also den Werth der Leibrente, wenn sie halbjährlich bezahlt werden soll, zu $\lambda a + \frac{1}{4}$, wenn sie vierteljährlich bezahlt werden soll, zu $\lambda a + \frac{3}{8}$, und wenn sie in noch kleinern Terminen fällig ist, zu $\lambda a + \frac{1}{2}$ unbedenklich annehmen.

§. 72.

Bey einigen Leibrenten-instituten ist es gebräuchlich, daſs die Renten zwar bis zum Todestage der Intereſsenten, aber erst in den gewöhnlichen Terminen, ausbezahlt werden.

Sind diese Termine halbjährlich, so ist:

1) der repartirte Werth deſsen, was die jedesmal das ganze Jahr durchlebenden Personen erhalten, wie vorher $= \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + 1)\,\lambda a$.

2) die Abgehenden leben im Anfange des Jahrs noch alle, in der Mitte des Jahrs zur Hälfte; im Durchsnitt also leben davon im ersten Halbjahre $\frac{3}{4}$

wovon Jeder in diesem Termin die Rente $\frac{1}{2}$ bekömmt. Im letzten Halbjahre lebt anfänglich $\frac{1}{2}$ des Decrements, am Ende Keiner; im Durchschnitt lebt also im 2ten Halbjahre $\frac{1}{4}$, wovon Jeder ebenfalls die halbe Rente in diesem Termin erhält. Folglich ist der repartirte gegenwärtige Werth dessen, was die im Laufe jedes Jahrs Abgehenden erhalten, $= \frac{1}{2} (\frac{3}{4} r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4})\, \vartheta a$.

Beides zusammen giebt den Werth der Leibrente $= \frac{1}{2} (r^{\frac{1}{2}} + 1)\, \lambda a + \frac{1}{2} (\frac{3}{4} r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4})\, \vartheta a$, und wenn man $\frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{p r}$ anstatt ϑa setzt, so erhält man den Werth dieser Leibrente $=$

$$\frac{r^{\frac{3}{2}} + 3r + 3r^{\frac{1}{2}} + 1}{8\, r}\, \lambda a + \frac{3r^{\frac{1}{2}} + 1}{8\, r}.$$

Für $= 1{,}04$ wird dieses $= 0{,}990386\, \lambda a + 0{,}487909$.

Bey vierteljährlichen Terminen würde aus den nämlichen Gründen diese Leibrente $= \frac{1}{4} (r^{\frac{3}{4}} + r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}} + 1).\, \lambda a + \frac{1}{32} (7r^{\frac{3}{4}} + 5r^{\frac{1}{2}} + 3r^{\frac{1}{4}} + 1) \vartheta a$, welches für den Zinsfuſs von 4 Procent 0,965241 λa + 0,490911 giebt.

§. 73.

Noch ist die Bestimmung denkbar, die auch bey der Kopenhagener Versorgungsanstalt wirklich

angenommen ist, dafs alle diejenigen Interefsenten, welche im Anfange jedes halben Jahrs leben, die Rente für das volle Semester, aber erst am Ende defselben, als dem gewöhnlichen Zahlungs-Termin, erhalten. Dann ist der repartirte gegenwärtige Werth defsen, was die das ganze Jahr hindurch lebenden Interefsenten erhalten, wie vorher, $= \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + 1)\lambda a$. Der repartirte baare Werth dessen, was die im Laufe jedes Jahrs Abgehenden erhalten, wird aber $= \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2})\vartheta a = \frac{1}{4}(2r^{\frac{1}{2}} + 1)\vartheta a$. Folglich wird der vollständige Werth dieser Leibrente $= \frac{1}{2}(r^{\frac{1}{2}} + 1)\lambda a + \frac{1}{4}(2r^{\frac{1}{2}} + 1)\vartheta a$

$$\frac{r + 2r^{\frac{1}{2}} + 1}{4r}\lambda a + \frac{2r^{\frac{1}{2}} + 1}{4r}.$$

§. 74.

Den Werth der Leibrente *nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens* findet man am bequemsten aus der Formel $\lambda a = p\left(1 - \frac{1}{A}\int\frac{\Delta A^{\underline{o}}}{r^{o}}\right)$. Wenn man nämlich $A = \alpha$, d. h. der Altersergänzung für das Alter a gleich setzt, so ist

$$\int\frac{\Delta A^{\underline{o}}}{r^{o}} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots \frac{1}{r^{\alpha-1}} =$$

$$r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \ldots \frac{1}{r^{\alpha}}\right) = r\int\frac{1}{r^{\alpha}};$$

folglich wird $p(1 - \frac{1}{A}\int\frac{\Delta A^o}{r^o}) = p(1 - \frac{r}{\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha})$, oder auch $= p - \frac{p^2 r}{\alpha} + \frac{p^2 r}{\alpha\, r^\alpha}$, weil $\int\frac{1}{r^\alpha} = p\,(1 - \frac{1}{r^\alpha})$.

Sollten für diejenigen, die im Laufe jedes Jahrs abgehen, ebenfalls bis zum Todestage, folglich im Durchschnitt bis zur Mitte des Jahrs, die Renten, und zwar am Ende des Jahrs, bezahlt werden, so erhielte man den Werth davon nach dem im §. 67 angegebenen allgemeinen Ausdruck $=$

$\frac{1}{2}\vartheta a = \frac{1}{2\,A\,r}\int\frac{\Delta A^o}{r^o}$. Wenn nun wieder $A = \alpha$ gesetzt wird, so ist, da dann jedes Decrement $= 1$ wird,

$$\frac{1}{2\,A\,r}\int\frac{\Delta A^o}{r^o} = \frac{1}{2\,\alpha\,r}(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots \frac{1}{r^{\alpha - 1}}) = \frac{1}{2\,\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha}.$$

Wenn dies zu der vorhin angegebenen Gröſse hinzugesetzt wird, so ist der vollständige Werth einer solchen Leibrente $=$

$$p - \frac{p\,r}{\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha} + \frac{1}{2\,\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha} =$$

$$p - \frac{2\,pr - 1}{2\,\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha} = p\,(1 - \frac{r + 1}{2\,\alpha}\int\frac{1}{r^\alpha}).$$

Ex. Wäre also die Altersergänzung oder $\alpha = 29$, und suchte man die Leibrente auf ganze Jahre, so hätte man, zu 4 Procent gerechnet,

$p - \frac{pr}{\alpha} \int \frac{1}{r^\alpha} = 25 - \frac{26}{29}\ 16{,}98371 =$ $25 - 15{,}2267 = 9{,}7733$, welche Leibrente nach Süſsmilchs Sterbensordnung dem Alter von 55 Jahren zugehört. Den vollständigen Werth dieser Rente hätte man $= p\left(1 - \frac{r + 1}{2\alpha} \int \frac{1}{r^\alpha}\right) =$

$25\left(1 - \frac{2{,}04}{58} . 16{,}98371\right) = 25\,(1 - 0{,}597359)$ $= 10{,}0660$.

§. 75.

Sollen die Renten nach der Hypothese *in augenblicklichen Terminen* bezahlt werden, so ist die Leibrente $= \int \frac{(\alpha - x)\, dx}{\alpha\, r^x} = \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{x dx}{r^x}$.

Nun ist $\int \frac{dx}{r^x} = \pi - \frac{\pi}{r^x}$ (42) und $\frac{1}{\alpha} \int \frac{x dx}{r^x} =$ $\frac{\pi}{\alpha}\left(\int \frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right)$ [ebendas.]. Folglich wird

$\int \frac{(\alpha - x)\, dx}{\alpha\, r^x} = \pi - \frac{\pi}{r^x} - \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{dx}{r^x} +$ $\frac{\pi x}{\alpha\, r^x}$, und wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, so ist der gesuchte Werth $= \pi - \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{dx}{r^x}$, (wo $\int \frac{dx}{r^x}$ die Zeitrente in augenblicklichen Terminen auf die

Zeit x ist) oder auch $\int \frac{(\alpha - x)\, dx}{\alpha\, r^x} =$

$$\pi - \frac{\pi^2}{p\alpha} \int \frac{1}{r^\alpha} = \pi - \frac{\pi^2}{\alpha} + \frac{\pi^2}{\alpha\, r^\alpha}.$$

Anm. Wenn man nach dieser Hypothese die Leibrenten berechnen will, so kömmt es darauf an, was als höchstes Lebensziel oder Altersergänzung anzusehen sey. Nimmt man ein für allemal ein unveränderliches Lebensziel an, wie *de Moivre*, so weichen diese Leibrenten von den Leibrenten der empirischen Sterbensordnungen beträchtlich ab. Will man die Leibrenten der Hypothese mit denen einer erfahrungsmäfsigen Sterbensordnung einigermafsen in Uebereinstimmung bringen, so mufs man, da nach der Hypothese die Altersergänzung gleich ist der doppelten mittleren Lebensdauer (§. 61), für *jedes Alter* die aus der zum Grunde zu legenden Mortalitätstabelle zu nehmende mittlere Lebensdauer, mit 2 multiplicirt, als Altersergänzung ansehen, und danach die hypothetische Leibrente berechnen. Wo künftig diese hypothetischen Leibrenten als Hülfsmittel für die Auffindung der Näherungswerthe werden empfohlen werden, da wird dabey immer, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, vorausgesetzt, dafs die Altersergänzung gleich der doppelten Lebensdauer für das gegebene Alter und nach der Tabelle, worauf die Rechnung angewandt werden soll, genommen werde. Wie übrigens die wahren Werthe der Süfsmilchschen, Wargentinschen und Florencourtschen Mortalitätstabelle zu den Leibrenten nach der Hypothese sich verhalten, zeigt die folgende Tabelle, worin die Leibrenten für die vorne angegebene mittlere Lebensdauer, zu 4 Procent berechnet, sowohl nach der Hypothese als nach den drey benannten Sterbensordnungen angeführt sind.

Leibrenten
für die gegebene Lebensdauer.

Lebensdauer.	n. d. Hypothese.	n. Süſsmilch.	n. Wargentin.	n. Deparcieux.
47½	18,3327	unmögl.	unmögl.	19,022
45	17,9895	- - -	18,886	18,782
42½	17,6259	18,264	18,511	1,8339
40	17,2275	17,764	18,025	17,901
37½	16,7908	17,379	17,495	17,471
35	16,3106	16,784	16,937	16,978
32½	15,7813	16,175	16,332	16,484
30	15,1965	15,486	15,682	15,860
27½	14,5487	14,766	14,986	15,087
25	13,8293	13,963	14,150	14,317
22½	13,0284	13,106	13,269	13,404
20	12,1347	12,127	12,316	12,390
17½	11,1349	11,053	11,222	11,268
15	10,0136	9,891	10,038	10,056
12½	8,7530	8,587	8,700	8,745
10	7,3326	7,125	7,245	7,283
7½	5,7281	5,548	5,597	5,639
5	3,9118	3,818	3,830	3,831
2½	1,8505	1,851	1,841	1,827

§. 76.

Will man aus der Leibrente für das Alter a die Leibrente *für das um ein Jahr höhere oder niedrigere Alter* bestimmen, so kann dies auf folgende Weise geschehen. Es ist $\lambda a = \frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{A^2}{r^2} + \frac{A^3}{r^3} + \ldots\right.$ und $\lambda\,\overline{a+1} = \frac{1}{A^1}\left(\frac{A^2}{r} + \right.$

$\frac{A^{3}}{r^{2}} + \frac{A^{4}}{r^{3}} + ..$ folglich $\frac{A^{1}}{A\,r} \lambda\,\overline{a+1} = \frac{1}{A} (\frac{A^{2}}{r^{2}} +$ $\frac{A^{3}}{r^{3}} + \frac{A^{4}}{r^{4}} + ..$ und $\frac{A^{1}}{A\,r} + \frac{A^{1}}{A\,r}\,\lambda\,\overline{a+1}$ $= \frac{1}{A} (\frac{A^{1}}{r} + \frac{A^{2}}{r^{2}} + \frac{A^{3}}{r^{3}} + ..) = \lambda a.$ Also wird $\frac{A^{1}}{A\,r} (1 + \lambda\,\overline{a+1}) = \lambda a$, und $\lambda\,\overline{a+1}$ $= \frac{A}{A^{1}}\, r\, \lambda a - 1.$

Sucht man aus der Leibrente für das Alter $a+1$ die Leibrente für das um ein Jahr niedrigere Alter a, so hat man, wie eben angeführt, $\lambda a = \frac{A^{1}}{A} \cdot \frac{1 + \lambda\,\overline{a+1}}{r}$. Will man b anstatt $a+1$, also $b-1 = a$, ferner $B = A^{1}$ und B^{-1} anstatt A setzen, so erhält man $\lambda\,\overline{b-1} = \frac{B}{B^{-1}} \cdot \frac{1 + \lambda b}{r}$.

Wäre z. B. nach der Süſsmilchschen Sterbensordnung und dem Zinsfuſse von 4 Procent für das Alter von 51 Jahren die Leibrente $= 10{,}5752$ gegeben, so wäre für $b - 1 = 50$, da nun $B^{-1} =$ 300 und $B = 291$ ist, $\lambda.\,50 = \frac{291}{300} \cdot \frac{11{,}5752}{1{,}04} =$ 10,7961, wie auch in den Tabellen angegeben ist.

§. 77.

Auf eine ähnliche Weise kann man aus der Leibrente für das Alter a die Leibrente *für das Al-*

ter $\overline{a+n}$ finden. Es ist nämlich $\lambda\,\overline{a+n} =$

$$\frac{1}{A^{\underline{n}}}\left(\frac{A^{\underline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\underline{n+2}}}{r^2} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}}}{r^{x-n}}\right)$$

und $\frac{A^{\underline{n}}}{A r^n}\,\lambda\,\overline{a+n}$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{A^{\underline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\underline{n+2}}}{r^{n+2}} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}}}{r^x}\right), \text{ also}$$

$$\frac{A^{\underline{1}}}{A\,r} + \frac{A^{\underline{2}}}{A\,r^2} + \ldots + \frac{A^{\underline{n}}}{A r^n} + \frac{A^{\underline{n}}}{A\,r^n}\,\lambda\,\overline{a+n} =$$

λa. Bezeichnet man also die ersten n Glieder von λa, d. i. $\frac{A^{\underline{1}}}{A\,r} + \frac{A^{\underline{2}}}{A\,r} + \ldots + \frac{A^{\underline{n}}}{A r^n}$, mit Q, so ist $\frac{A^{\underline{n}}}{A r^n}\,\lambda\,\overline{a+n} = \lambda a - Q$, und $\lambda\,\overline{a+n} = \frac{A\,r^n}{A^{\underline{n}}}(\lambda a - Q)$. Da Q indeſsen n Glieder hat, so kann es nur in dem Falle vortheilhaft seyn von dieser Formel Gebrauch zu machen, wenn das Stück Q weniger Glieder hat, als die Altersergänzung von $\overline{a+n}$ Einheiten, da sonst $\lambda\overline{a+n}$ leichter unmittelbar zu berechnen wäre. Umgekehrt kann man auch aus $\lambda\,\overline{a+n}$ die Leibrente λa finden.

Es ist nämlich $\lambda a = \frac{\overset{1}{A}}{A\,r} + \frac{\overset{2}{A}}{A\,r^2} + \ldots + \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^n}$

$+ \frac{\overset{n+1}{A}}{A\,r^{n+1}} + \ldots + \frac{\overset{x}{A}}{A\,r^x} = \frac{\overset{1}{A}}{A\,r} + \frac{\overset{2}{A}}{A\,r^2} + \ldots$

$+ \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^n} + \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^n}\,\lambda\,\overline{a+n}$, oder, wenn man die ersten n Glieder von λa mit Q bezeichnet, so ist λa

$= Q + \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^n}\,\lambda\,\overline{a+n}.$

§. 78.

Ist der Werth der Leibrente nach einem bestimmten Zinsfuſse bekannt, so läſst sich zwar unmittelbar daraus der Werth derselben *nach einem andern Zinsfuſse* nicht mit Genauigkeit angeben. Indeſsen giebt es doch Mittel, diesen Werth durch eine ziemlich einfache Rechnung ohngefähr zu bestimmen.

Man kann nämlich *erstlich* annehmen, daſs, wenn die nämliche Sterbensordnung zum Grunde gelegt wird, die Leibrenten nach zwey verschiedenen Zinsfüſsen sich beinahe verhalten wie die Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer nach diesen zwey verschiedenen Zinsfüſsen, und wenn die Werthe der Zeitrenten bekannt sind, so kann man nach der Regel de Tri den Werth der verlangten Leibrenten suchen. Es sey z. B. die Leibrente für das

Alter von 49 Jahren nach Süſsmilchs Tabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent mit 11,0478 gegeben; man sucht den Werth derselben Leibrente nach dem Zinsfuſse von 5 Procent. Hier ist die mittlere Lebensdauer nach Süſsmilchs Sterbensordnung für das Alter von 49 Jahren = 17,49, sehr nahe = 17,50, und es verhalten sich die Werthe der Zeitrente 1 auf 17,50 Jahre nach den zwey verschiedenen Zinsfüſsen wie 12,41492 : 11,48434. Man setzt also an : 12,41492 : 11,48434 = 11,0478 : x, nnd findet x = 10,2197. Der wahre Werth ist 10,0928, also der Unterschied = 0,1269.

2) Noch näher kömmt man dem wahren Werthe, wenn man annimmt, daſs die Leibrenten der Mortalitätstabellen nach den beiden Zinsfüſsen sich zu einander verhalten, wie die nach den nämlichen Zinsfüſsen berechneten Leibrenten der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens auf die doppelte mittlere Lebensdauer. Will man z. B. wieder, wenn die Leibrente zu 4 Procent für das Alter von 49 Jahren gegeben ist, diese Leibrente nach dem Zinsfuſse von 5 Procent haben, so suche man die Werthe der Leidrenten für das nämliche Alter nach beiden Zinsfüſsen zufolge der Hypothese. Man findet diese Leibrente zu 4 Procent = 11,1308, und zu 5 Procent = 10,1720, folglich hat man 11,1308 : 10,1720 = 11,0478 : x, und x = 10,0961. Da der wahre Werth = 10.0928 ist, so ist der Unterschied nur = 0,0033.

Viertes Kapitel.

Von Veränderlichen Leibrenten.

---

§. 79.

Soll eine Leibrente im ersten Jahre mit 1 bezahlt werden und in den folgenden Jahren nach einer geometrischen Progreſsion, deren Exponent = s ist, fortgehen, so ist ihr gegenwärtiger Werth oder V =

$$\frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{A^2\, s}{r^2} + \frac{A^3\, s^2}{r^3} + \ldots + \frac{A^x\, s^{x-1}}{r^x}\right),$$

auch V =

$$\frac{1}{A\,s}\left(\frac{A^1\, s}{r} + \frac{A^2\, s^2}{r^2} + \frac{A^3\, s^3}{r^3} + \ldots + \frac{A^x\, s^x}{r^x}\right)$$

und wenn man $q = \frac{r}{s}$ setzt, V =

$$\frac{1}{A\,s}\left(\frac{A^1}{q} + \frac{A^2}{q^2} + \ldots + \frac{A^x}{q^x}\right).$$ Es ist aber

$$\frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{q} + \frac{A^2}{q^2} + \ldots + \frac{A^x}{q^x}\right)$$ die Leibrente für

das Alter a nach dem Zinsfuſse $\overline{q - 1}$, folglich erhält man den Werth der gesuchten Leibrente, wenn man die Leibrente für a nach dem Zinsfuſse $q - 1$ oder $\frac{r}{s} - 1$ mit dem Exponenten s dividirt.

Wäre r = s, folglich $\frac{r}{s} = 1$, so würde der Werth dieser Leibrente $= \frac{1}{A\,r}(A^1 + A^2 + \ldots + A^{\frac{1}{}})$; dies ist aber die mittlere Lebensdauer, ohne Corection (§. 57.), mit r dividirt. Wenn also eine Leibrente nach demselben Verhältnifse steigt wie ein Kapital mit seinen Zinsen anwächst, so ist diese Leibrente gleich der mittleren Lebensdauer, mit dem Exponenten der Kapitalzunahme dividirt.

§. 80.

Nach der Hypothese vom gleichmäfsigen Absterben wäre, wenn α die Altersergänzung und s den Exponenten der Progrefsion bezeichnet, der Werth der im vorigen §. angegebenen Leibrente oder

$$V = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,\frac{1}{r} + \frac{\alpha - 2}{\alpha}\,\frac{s}{r^2} + \frac{\alpha - 3}{\alpha}\,\frac{s^2}{r^3} + \ldots + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{s^{\alpha - 2}}{r^{\alpha - 1}},$$

oder, wenn $\frac{r}{s} = q$ gesetzt wird

$$V = \frac{1}{\alpha s}\left(\frac{\alpha - 1}{q} + \frac{\alpha - 2}{q^2} + \frac{\alpha - 3}{q^3} + \ldots \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{q^{\alpha - 1}}\right).$$

Also wird nach §. 38. $V =$

$$\frac{1}{\alpha\,.\,s\,.\,\overline{q - 1}}\left(\alpha - q \int \frac{1}{q^{\alpha}}\right) =$$

$\frac{1}{s \cdot q - 1} (1 - \frac{q}{\alpha} \int \frac{1}{q^{\alpha}})$, oder, wenn man r restituirt, $V = \frac{1}{r - s} (1 - \frac{r}{s \cdot \alpha} \int \frac{1}{(\frac{r}{s})^{\alpha}})$,

wenn nämlich $r > s$, und $=$

$\frac{1}{s - r} (\frac{r}{s \cdot \alpha} \int (\frac{r}{s})^{\alpha} - 1)$, wenn $r < s$.

Wäre $r = s$, so wäre der Werth der obigen Formel $\frac{0}{0}$, indem $\int \frac{1}{1^{\alpha}} = \alpha$ und folglich

$1 - \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{1^{\alpha}} = 1 - 1$ ist. Indessen hat man dann

$$V = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{r} + \frac{\alpha - 2}{\alpha} \frac{1}{r} + \frac{\alpha - 3}{\alpha} \frac{1}{r} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\alpha r} = \frac{1}{\alpha \cdot r} \frac{\alpha \cdot \overline{\alpha - 1}}{2} = \frac{\alpha - 1}{2 r},$$ d. h.

wieder gleich der mittleren Lebensdauer, ohne Correction, dividirt mit dem Exponenten der Kapitalzunahme.

§. 81.

Sollte die Leibrente im ersten Jahre mit 1, im zweiten mit 2, im dritten mit 3, etc. bezahlt werden, also *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsen*, welche Leibrente für das Alter a mit La bezeichnet werden soll, so wäre:

$$La = \frac{1}{A} (\frac{A^1}{r} + \frac{2 A^2}{r^2} + \frac{3 A^3}{r^3} + \ldots + \frac{x A^{x}}{r^x})$$

$$= \frac{1}{A}\left(\int \frac{A'^{1}}{r^{1}} + \int \frac{A'^{2}}{r^{2}} + \int \frac{A'^{3}}{r} + \ldots\right) = \frac{1}{A}\int^{2} \frac{A'^{1}}{r^{1}}.$$

Da nun auch La =

$$\frac{1}{A}\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{A^{1}}{r} & + \frac{A^{2}}{r^{2}} & + \frac{A^{3}}{r^{3}} & + \ldots + & \frac{A^{x}}{r^{x}} \\ & + \frac{A^{2}}{r^{2}} & + \frac{A^{3}}{r^{3}} & + \ldots + & \frac{A^{x}}{r^{x}} \\ & & + \frac{A^{3}}{r^{3}} & + \ldots + & \frac{A^{x}}{r^{x}} \\ & & & + \ldots & \end{array}\right\},$$

und $\frac{1}{A}\left(\frac{A^{1}}{r} + \frac{A^{2}}{r^{2}} + \ldots\right) = \lambda a$, ferner

$\frac{1}{A^{1}}\left(\frac{A^{2}}{r} + \frac{A^{3}}{r^{2}} + \ldots\right) = \lambda\,\overline{a+1}$, also

$\frac{1}{A}\left(\frac{A^{2}}{r^{2}} + \frac{A^{3}}{r^{3}} + \ldots\right) = \frac{A^{1}}{A r}\lambda\,\overline{a+1}$, imgleichen

$\frac{1}{A^{2}}\left(\frac{A^{3}}{r} + \frac{A^{4}}{r^{2}} + \ldots\right) = \lambda\,\overline{a+2}$, und

$\frac{1}{A}\left(\frac{A^{3}}{r^{3}} + \frac{A^{4}}{r^{4}} + \ldots\right) = \frac{A^{2}}{A r^{2}}\lambda\,\overline{a+2}$, etc., so erhält man $La = \lambda a + \frac{A^{1}}{A r}\lambda\,\overline{a+1} + \frac{A^{2}}{A r^{2}}\lambda\,\overline{a+2} + \ldots$

$+ \frac{A^{x}}{A r^{x}}\lambda\,\overline{a+x}$, wonach La aus den unveränderlichen Leibrenten zusammengesetzt werden kann.

§. 82.

Vermittelst der angeführten Formel lassen sich

die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrenten ziemlich leicht berechnen. Man summirt nämlich in der oben §. 65. beschriebenen Hülfstabelle zu Berechnung der unveränderlichen Leibrenten, die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden noch einmal von unten und setzt die jedesmalige Summe von n Gliedern von unten neben das nte Glied. Um demnächst die steigende Leibrente für das Alter a zu finden, dividirt man nur die, in der auf diese Weise berechneten Columne der zweiten Summen, neben dem Alter $\overline{a+1}$ stehende Summe mit der bey dem Alter a stehenden discontirten Zahl der Lebenden, wo dann der Quotient die gesuchte Leibrente giebt. Nach der Einrichtung der Tabelle ist nämlich die bey dem Alter $\overline{a+1}$ stehende zweite Summme

$$\begin{aligned} = \frac{A^1}{r^{a+1}} + \frac{A^2}{r^{a+2}} + \frac{A^3}{r^{a+3}} + \ldots + \frac{A^x}{r^{a+x}} \\ + \frac{A^2}{r^{a+2}} + \frac{A^3}{r^{a+3}} + \ldots + \frac{A^x}{r^{a+x}} \\ + \frac{A^3}{r^{a+3}} + \ldots + \frac{A^x}{r^{a+x}} \\ + \ldots \end{aligned}$$

Ferner ist die bey dem Alter a stehende discontirte Zahl der Lebenden $= \frac{A}{r^a}$. Wenn also die gedachte Summe durch diese letzte Zahl dividirt wird, so erhält man den Quotienten =

$\frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{A^2}{r^2} + \frac{A^3}{r^3} + ..\right) + \frac{1}{A}\left(\frac{A^2}{r^2} + \frac{A^3}{r^3} + ..\right) + \frac{1}{A}\left(\frac{A^3}{r^3} + ..\right) + .. = La$, nach dem dafür im vorhergehenden §. angegebenen Ausdruck.

Anm. In Morgans Principles etc. findet man Seite 269 eine Tafel der steigenden Leibrenten vom Jahre 1 an bis zum Jahre 90, nach der Northamptoner Sterbensordnung und dem Zinsfuße zu 4 Procent berechnet.

§. 83.

Man kann indessen auch hier, anstatt der Zahlen der Lebenden, die Decremente derselben oder ihre Differenzen gebrauchen. Es ist nämlich:

$$La = \frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{2\,A^2}{r^2} + \frac{3\,A^3}{r^3} + .. + \frac{x\,A^x}{r^x}\right)$$ und $(r - 1)\,La$

$$= \frac{1}{A}\left\{\begin{array}{l} \frac{A^1}{r^0} + \frac{2\,A^2}{r} + \frac{3\,A^3}{r^2} + .. \\ \quad - \frac{A^1}{r} - \frac{2\,A^2}{r^2} - .. \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{A}\left\{\begin{array}{l} \frac{A - \Delta A}{r^0} + \frac{2\,A^1 - 2\Delta A^1}{r} + \frac{3A^2 - 3\Delta A^2}{r^2} + .. \\ \quad - \frac{A^1}{r} - \frac{2\,A^2}{r^2} - .. \end{array}\right\}$$

Da nun

$$\frac{1}{A}\left\{\begin{array}{l} \frac{A^0}{r^0} + \frac{2A^1}{r} + \frac{3A^2}{r^2} + \dots \\ \qquad - \frac{A^1}{r} - \frac{2A^2}{r^2} - \dots \end{array}\right\}$$

$= 1 + \lambda a$, so wird $\overline{r - 1}\,La$

$$= 1 + \lambda a - \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{2\Delta A^1}{r^1} + \frac{3\Delta A^2}{r^2} + \dots\right).$$

Wenn man also $\frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{2\Delta A^1}{r} + \frac{3\Delta A^2}{r^2} + \dots$ oder, welches dasselbe ist, $\int\frac{\Delta A'^0}{r^0} + \int\frac{\Delta A'^1}{r^1} + \int\frac{\Delta A'^2}{r^2} + \dots$, mit $\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0}$ bezeichnet, so ist

$$\overline{r - 1}\,La = 1 + \lambda a - \frac{1}{A}\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0},$$

und $La = p\left(1 + \lambda a - \frac{1}{A}\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0}\right)$.

Will man, anstatt der Decremente, die Differenzen derselben gebrauchen, so hat man:

$$\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0} = \frac{\Delta A'^0}{r^0} + \frac{2\Delta A^1}{r} + \frac{3\Delta A^2}{r^2} + \frac{4\Delta A^3}{r^3} + \dots$$

folglich

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0} = \frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{2\Delta A^1}{r^1} + \frac{3\Delta A^2}{r^2} + \frac{4\Delta A^3}{r^3} + \dots$$
$$- \frac{\Delta A^0}{r^1} - \frac{2\Delta A^1}{r^2} - \frac{3\Delta A^2}{r^3} - \dots$$

$$= \frac{\Delta A^0}{r^0} + \frac{\Delta A^1}{r^1} + \frac{\Delta A^2}{r^2} + \ldots$$
$$- \frac{\Delta A^0 - \Delta A^1}{r^1} - \frac{2\Delta A^1 - 2\Delta A^2}{r^2} - \ldots$$

$$- \frac{\Delta A^3}{r^3} + \ldots$$
$$- \frac{3\Delta A^2 - 3\Delta A^3}{r^3} - \ldots$$

$= \int \frac{\Delta A'^0}{r^0} - \frac{1}{r} \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0}$, und $\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0} = \frac{r}{r-1} \left(\int \frac{\Delta A'^0}{r^0} - \frac{1}{r} \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0} \right) = p \left(r \int \frac{\Delta A'^0}{r^0} - \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0} \right)$. Danach wird also La $=$

$$p \left(1 + \lambda a - \frac{pr}{A} \int \frac{\Delta A'^0}{r^0} + \frac{p}{A} \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0} \right).$$

Da ferner $\frac{1}{A} \int \frac{\Delta A'^0}{r^0} = 1 - \frac{\lambda a}{p}$ (§. 64.), also $\frac{pr}{A} \int \frac{\Delta A'^0}{r^0} = pr - r\,\lambda a$, so wird auch

$$La = p \left(1 + \lambda a - pr + r\,\lambda a + \frac{p}{A} \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0} \right)$$
$$= p \left[(1 + r)\,\lambda a - p + \frac{p}{A} \int^2 \frac{\Delta^2 A'^0}{r^0} \right],$$

indem $1 - pr = 1 - p\left(1 + \frac{1}{p}\right) = -p$.

Anm. Man würde auch hier, anstatt der zweiten Differenzen der Hauptreihe, die dritten Differenzen substituiren können. Da indessen schon die zweiten Differenzen gröſstentheils kleine Zahlen sind, so kann die Rechnung mit denselben wohl

nicht sehr weitläuftig seyn. Indessen ist hier wieder zu beobachten, was schon oben angeführt worden, daſs, so weit die Differenzen negativ sind, die Summe derselben von der Summe der positiven Differenzen abgezogen werden müſse.

§. 84.

Es sind jedoch auch hier, wie im §. 64. vorher, die Renten nur für diejenigen berechnet, welche jedesmal das ganze Jahr durchleben. Soll auch für die im Laufe jedes Jahrs Abgehenden bis zum Todestage, also im Durchschnitt für ein halbes Jahr, die Rente am Ende des Jahrs bezahlt werden, so beträgt dies nach seinem gegenwärtigen Werth für das erste Jahr $\frac{1}{2}\,\frac{\Delta A}{r}$, für das zweite Jahr $\frac{1}{2}\,\frac{2\,\Delta A^1}{r^2}$, für das dritte $\frac{1}{2}\,\frac{3\,\Delta A^2}{r^3}$ etc. Folglich ist der baare Werth, über alle Interessenten vertheilt,

$$= \frac{1}{2\,A}\left(\frac{\Delta A^0}{r^1} + \frac{2\,\Delta A^1}{r^2} + \frac{3\,\Delta A^2}{r^3} + \ldots\right),$$ welches wieder mit $\frac{1}{2\,A\,r}\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0}$ bezeichnet werden kann.

Wenn diese Ergänzung zu dem vorhin gefundenen Werthe der steigenden Leibrente hinzugefügt wird, so ist der vollständige Werth der am Ende des Jahrs zahlbaren nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsenden Leibrente =

$$p\left(1 + 1a - \frac{1}{A}\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0}\right) + \frac{1}{2\,A\,r}\int^2 \frac{\Delta A'^0}{r^0} =$$

$p + p\,\lambda a - \frac{2\,pr - 1}{2\,A\,r}\int^2 \frac{\Delta\,A'^{\Omega}}{r^o}$, wo man wieder wie im vorigen §. anstatt der Decremente ihre Differenzen setzen kann.

§. 85.

Da die im vorletzten §. angegebene Formel allgemein für jede Sterbensordnung gilt, so kann man daraus auch den Werth der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrente zufolge der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens bestimmen. Es ist nämlich allgemein La $=$ $p\,(1 + \lambda a - \frac{1}{A}\int^2 \frac{\Delta\,A'^{\Omega}}{r^o})$. Nun ist aber nach der Hypothese, wenn α die Altersergänzung und die Anfangszahl der Lebenden bezeichnet, $-\frac{1}{A}\int^2 \frac{\Delta A'^{\Omega}}{r^o}$ $= -\frac{r}{\alpha}(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \ldots + \frac{\alpha}{r\alpha}) =$ $-\frac{r}{\alpha}\int \frac{\alpha}{r\alpha} = -\frac{r}{\alpha}\,pr\int \frac{1}{r\alpha} + \frac{pr}{r\alpha}$ (§. 37) $= r\,(p - \frac{pr}{\alpha}\int \frac{1}{r\alpha}) - r\,p\,(1 - \frac{1}{r\alpha}) =$ $r\,\lambda a - r\int \frac{1}{r\alpha} = r\,\lambda a - 1 - \int \frac{1}{r\alpha - 1}$.

Folglich hat man La $= p\,(1 + \lambda a + r\,\lambda a - 1 - \int \frac{1}{r\alpha - 1}) = p\,[(1 + r)\,\lambda a - \int \frac{1}{r\alpha - 1})$, wo

dann λa nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens genommen werden muſs.

Soll auch hier für die, welche im Laufe jedes Jahrs abgehen, eine halbjährige am Ende des Jahrs zahlbare Rente gerechnet werden, so ist das nach dem vorhergehenden §. hinzuzulegende Stück $\frac{1}{2 A r} \int^2 \frac{\Delta A'^{\Omega}}{r^o}$ hier $= \frac{1}{2 \alpha} \int \frac{\alpha}{r^\alpha} = \frac{p r}{2 \alpha} \int \frac{1}{r^\alpha} - \frac{p}{2 r^\alpha}$. Setzt man nun in dem vorher angegebenen Werthe von La, $- p \int \frac{1}{r^\alpha} + \frac{p}{r^\alpha}$ anstatt $- p \int \frac{1}{r^\alpha - 1}$; so hat man den vollständigen Werth dieser Rente $= p (1 + r) \lambda a - p \int \frac{1}{r^\alpha} + \frac{p}{r^\alpha} + \frac{p r}{2 \alpha} \int \frac{1}{r^\alpha} - \frac{p}{2 r^\alpha} = p (1 + r) \lambda a - p (1 - \frac{r}{2 \alpha}) \int \frac{1}{r^\alpha} + \frac{p}{2 r^\alpha}$.

§. 86.

Wenn die Leibrente, so wie sie im vorigen §. angegeben worden, jedoch nicht am Ende des Jahrs auf einmal, sondern *in augenblicklichen Terminen* bezahlt werden sollte, so wäre der Werth derselben, da jede Rente, die am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, sich zu dem Werthe der näm-

lichen Rente, wenn sie in augenblicklichen Terminen während des Jahrs zahlbar ist, wie p : π verhält (§. 33.), $= \pi \left[(1+r) \lambda a - \left(1 - \frac{r}{2\alpha}\right) \int \frac{1}{r\alpha} + \frac{1}{2\, r\alpha} \right]$, wo wieder λa die nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens berechnete Leibrente zeichnet.

Ex. Wenn diese Leibrente für das Alter von 90 Jahren nach der Alterergänzung der Süfsmilchschen Mortalitätstafel und zu 4 Procent gesucht würde, so wäre dieselbe, da p $= 25$, $\alpha = 6$ und $\lambda a = 2{,}2842$ ist:

1) für jährliche Hebungen $= 25 \left(2{,}04 . 2{,}2842 - \left(1 - \frac{1{,}04}{12}\right) 5{,}242137 + \frac{0{,}790315}{2}\right) =$
$25 (4{,}65976 + 0{,}39515 - 4{,}78782) =$
$25 . 0{,}26710 = 6{,}6775.$

2) für augenblickliche Zahlungen würde sie $= 25{,}4967 . 0{,}26710 = 6{,}81017.$

§. 87.

Sollte aber eine Leibrente wie die vorhin angegebene, nach der Hypothese, nicht allein in augenblicklichen Terminen bezahlt werden, sondern zugleich in diesen Terminen *nach Verhältnifs der verflossenen Zeit steigen*, so wäre ihr Werth, wenn α die Alterergänzung und x die abgelaufene Zeit bezeichnet, $= \int \frac{(\alpha - x)\, x\, dx}{\alpha . r^x} =$

$= \int \frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{x^2\,dx}{rx}$. Nun ist $\int \frac{x\,dx}{rx}$ $= \pi \int \frac{dx}{rx} - \frac{\pi x}{rx}$, und $\frac{1}{\alpha} \int \frac{x^2\,dx}{rx} =$ $\frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{x\,dx}{rx} - \frac{\pi x^2}{\alpha\, rx}$ (§. 42). Folglich wird $La = \pi \int \frac{dx}{rx} - \frac{\pi x}{rx} - \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{x\,dx}{rx} + \frac{\pi x^2}{\alpha rx}$, und da nach der Integration $x = \alpha$ gesetzt werden muſs und $\frac{\pi x^2}{\alpha\, rx} = \frac{\pi x}{rx}$ wird, so ist hiernach, wenn man die gesuchte Leibrente wieder mit La bezeichnet, $La = \pi \int \frac{dx}{rx} - \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{x\,dx}{rx}$. Es ist aber (nach §. 75) $\int \frac{dx}{rx} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{x\,dx}{rx}$ die vollständige unveränderliche Leibrente für das Alter a in augenblicklichen Terminen, und wenn diese hier durch λa ausgedruckt wird, so ist $La =$ $2\pi\lambda a - \pi \int \frac{dx}{rx} = \pi (2\lambda a - \frac{\pi}{p} \int \frac{1}{r\alpha})$, wo $\frac{\pi}{p} \int \frac{1}{r\alpha}$ die in augenblicklichen Terminen zahlbare Zeitrente 1 auf α Jahre ist.

Ex. Wenn wieder $\alpha = 6$, und $r = 1{,}04$ ist, so hat man die vollständige unveränderliche Leibrente für a bey augenblicklichen Hebungen oder λa $= 2{,}77795$, folglich erhält man $La =$

$25{,}4967\ (2 \cdot 2{,}77795 - \frac{25{,}4967}{25}\ 5{,}242137) =$

25,4967 (5,5559 — 5,3463) = 5,3446.

Anm. Diese Leibrente ist kleiner als die im vorhergehenden §. angegebene, weil vorher die Rente für das ganze nte Jahr mit n Thalern bezahlt werden sollte, hier aber während des nten Jahrs continuirlich von $\overline{n - 1}$ bis n steigen soll.

Im Fall diese Leibrente sofort im Anfang des ersten Jahrs mit 1 anfangen, sonst aber so, wie vorher angegeben, steigen sollte, so müſste man zu dem vorhin gefundenen Werthe noch den Werth einer unveränderlichen in augenblicklichen Terminen zahlbaren Leibrente 1 hinzulegen. In dem zuletzt angeführten Beispiele erhielte man also das Gesuchte = 5,3446 + 2,7779 = 8,1225.

§. 88.

Wenn eine Leibrente für das Alter a im ersten Jahre mit 1 bezahlt werden und in jedem folgenden Jahre um $\frac{1}{n}$ steigen sollte, so kann man dieselbe in zwey Theile zerlegen. Der erste Theil, welcher die unveränderliche Rente 1 befaſst, ist $= \lambda a$. Der zweite Theil, der die succeſsiv steigende Rente $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ etc. begreift, ist gleich dem nten Theile einer mit 1 anfangenden und nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrente. Da diese letzte Rente aber ein Jahr später anfängt, so ist dabey die wachsende Leibrente für das Alter $\overline{a + 1}$ zu nehmen, welche auf 1 Jahr discontirt und auf die Anfangszahl A anstatt A^1 reducirt werden muſs. Folglich ist der gesammte Werth dieser Leib-

rente oder $V = \lambda a + \frac{A^{\underline{1}}}{n \cdot r A} \overline{La+1}$.

Bequemer ist es indeſsen, von dem ersten Theile, oder λa, $\frac{1}{n}$ abzuziehen und dies zu dem folgenden Theile zu legen, wodurch man erhält

$$V = \frac{1}{A} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-1}{n} \frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{n-1}{n} \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{n-1}{n} \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots \\ + \frac{1}{n} \frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{2}{n} \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{3}{n} \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= \frac{n-1}{n} \lambda a + \frac{1}{n} La.$$

§. 89.

Falls eine Leibrente für das Alter a und bey der Altersergänzung α, *nach der umgekehrten Ordnung der natürlichen Zahlen*, nämlich am Ende des ersten Jahrs mit $\overline{\alpha - 1}$, des zweiten mit $\overline{\alpha - 2}$ etc. Rententhalern bezahlt werden sollte, so wäre ihr baarer Werth oder $V =$

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\overline{\alpha - 1} \cdot A^{\underline{1}}}{r} + \frac{\overline{\alpha - 2} \cdot A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{\overline{\alpha - 3} \cdot A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots + \frac{1 \; A^{\underline{x-1}}}{r^{x-1}} \right) = \frac{\alpha}{A} \left(\frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots + \frac{A^{\underline{x-1}}}{r^{x-1}} \right) - \frac{1}{A} \left(\frac{A^{\underline{1}}}{r^1} + \frac{2\,A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{3\,A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots + \frac{\overline{x-1} \; A^{\underline{x-1}}}{r^{x-1}} \right) = \alpha \lambda a - La.$$

§. 90.

Da diese Formel allgemein ist, so gilt sie auch für die Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens. In diesem Falle wird nun $\alpha . \lambda a - La = \alpha . \lambda a - p(r+1)\lambda a + p\int\frac{1}{r^{\alpha-1}}$ (§. 85). Und da $\lambda a = p\left(1 - \frac{r}{\alpha}\int\frac{1}{r^{\alpha}}\right)$, also $\alpha . \lambda a = \alpha p - pr\int\frac{1}{r^{\alpha}} = \alpha p - p - p\int\frac{1}{r^{\alpha-1}}$, so hat man auch

$$\alpha\lambda a - p(r+1)\lambda a + p\int\frac{1}{r^{\alpha-1}} = \alpha p - p - p(r+1)\lambda a = p(\alpha-1) - p(r+1)\lambda a.$$

Anm. Dafselbe Resultat würde sich noch auf einem andern Wege ergeben. Es ist nämlich der Werth der gedachten

$$\text{Leibrente} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\overline{\alpha-1}\,.\,\overline{\alpha-1}}{r} + \frac{\overline{\alpha-2}\,.\,\overline{\alpha-2}}{r^2} + \frac{\overline{\alpha-3}\,.\,\overline{\alpha-3}}{r^3} + \ldots\right) = \frac{\alpha}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{r} + \frac{\alpha-2}{r^2} + \frac{\alpha-3}{r^3} + \ldots\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1\,.\,\overline{\alpha-1}}{r} + \frac{2\,.\,\overline{\alpha-2}}{r^2} + \frac{3\,.\,\overline{\alpha-3}}{r^3} + \ldots\right) = \alpha . \lambda a - La.$$

Auch ist

$$\frac{1}{\alpha}\int\frac{(\alpha-n)^2}{r^n} = \frac{p}{\alpha}\left(\alpha^2 - 2r\int\frac{\alpha-n}{r^n} - r\int\frac{1}{r^{\alpha}}\right)$$

$$(\S.\ 43) = p\alpha - \frac{2pr}{\alpha}\int\frac{\alpha-n}{r^n} - \frac{pr}{\alpha}\int\frac{1}{r^{\alpha}}$$

$= p\alpha - p - \frac{2pr}{\alpha}\int\frac{\alpha - n}{rn} + p - \frac{pr}{\alpha}\int\frac{1}{r\alpha}$
$= p\alpha - p - 2pr\lambda a + \lambda a = p(\alpha - 1) - p(r + 1)\lambda a.$

§. 91.

Sollte die hypothetische Leibrente für das Alter a und die Alterserganzung α mit α anfangen, während der Alterserganzung continuirlich bis auf 0 abnehmen und in augenblicklichen Terminen bezahlt werden, so würde, wenn die verflossene Zeit mit x bezeichnet wird, der baare Werth dieser Rente $= \int\frac{(\alpha - x)^2 dx}{\alpha\, rx} = \alpha\int\frac{dx}{rx} - 2\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{1}{\alpha}\int\frac{x^2 dx}{rx} = \alpha\pi(1 - \frac{1}{rx}) - 2\pi\int\frac{dx}{rx} + \frac{2\pi x}{rx} + \frac{2\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{\pi x^2}{\alpha\, rx}$. (§. 43.) Nun ist $2\pi\int\frac{dx}{rx} - \frac{2\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} = 2\pi\lambda a$ (§. 74), und da nach der Integration $x = \alpha$ wird, so ist $\pi\alpha(1 - \frac{1}{rx}) + \frac{2\pi x}{rx} - \frac{\pi x^2}{\alpha rx} = \pi\alpha$. Folglich wird $\int\frac{(\alpha - x)^2 dx}{\alpha\, rx} = \pi\alpha - 2\pi\lambda a$, wo nämlich die Leibrente nach §. 74. genommen werden muſs.

§. 92.

Falls die Leibrente für das Alter a im ersten Jahre mit $\alpha + m - 1$ anfangen und jährlich um 1 abnehmen sollte, so wäre dies eben so viel, als ob eine veränderliche Rente, die mit $\alpha - 1$ anfängt, und m unveränderliche Leibrenten, jede jährlich mit 1 zahlbar, gegeben werden sollten. Der Werth einer solchen Leibrente wäre also im Allgemeinen $= (\alpha + m)\,\lambda a - La$, und nach der Hypothese insbesondre $= p\,(\alpha - 1) - (pr + p - m)\,\lambda a$.

Fünftes Kapitel.

Von aufgeschobenen, aufhörenden und aufgesparten Leibrenten.

---

§. 93.

Soll eine Rente nicht sofort, sondern erst nach einer bestimmten Anzahl von Jahren anfangen zu laufen, so heifst sie eine *aufgeschobene* Leibrente; verstürbe der Rentenier in der Zwischenzeit, so würde dann überall keine Rente für ihn bezahlt.

Soll dagegen eine Leibrente nur während einer bestimmten Reihe von Iahren bezahlt werden,

nachher aber nicht weiter, so heiſst sie eine *aufhörende* Leibrente; stürbe der Rentenier vor Ablauf der bestimmten Zeit, so fiele auch die Rente mit seinem Tode weg.

Eine fällige Leibrente, welche der Rentenirer eine Anzahl von Jahren bey der Rentenkaſse stehen läſst, heiſst in sofern eine *aufgesparte* Leibrente, als dadurch eine nach der Bestimmung des Renteniers zu verwendende Summe gesammelt wird; die Zeit, während deren die Rente nicht gehoben wird, heiſst die Zeit der *Ruhe*.

§. 94.

Wenn die um n Jahre *aufgeschobene* oder mit dem $\overline{n+1}$ten Jahre anfangende Leibrente mit $\overline{\lambda a}^{\underline{n+1}}$ bezeichnet wird, so ist, da nun in dem Werthe der vollen Rente, d. h. in $\lambda a = \frac{1}{A}\left(\frac{A^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots\right)$, die ersten n Glieder wegfallen,

$$\overline{\lambda a}^{\underline{n+1}} = \frac{1}{A}\left(\frac{A^{\underline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\underline{n+2}}}{r^{n+2}} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}}}{r^{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{A r^{n}}\left(\frac{A^{\underline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\underline{n+2}}}{r^{2}} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}}}{r^{x-n}}\right).$$

Nun ist $\frac{1}{A^{\underline{n}}}\left(\frac{A^{\underline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\underline{n+2}}}{r^2} + \ldots +\right.$

$\frac{A^{\overline{x}}}{r^{x-n}}) = \lambda\,\overline{a+n}$, folglich $\frac{1}{A\,r^n}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots + \frac{A^{\overline{x}}}{r^{x-n}}\right) = \frac{A^{\overline{n}}}{A\,r^n}.\,\lambda\,\overline{a+n}$, und es ist

also $\lambda\,\overline{a}^{\,,n+1} = \frac{A^{\overline{n}}}{A\,r^n}\,\lambda\,\overline{a+n}$, d. h. man findet die um n Jahre aufgeschobene Leibrente für das Alter a, wenn man die Leibrente für das Alter $\overline{a+n}$ auf n Jahre discontirt und den Quotienten mit der Wahrscheinlichkeit, daſs die Person A am Ende des nten Jahrs noch lebe, multiplicirt.

Ex. Eine Person von 50 Jahren kauft eine Leibrente unter der Bedingung, daſs sie erst nach 10 Jahren anfange zu laufen, wie groſs ist der Werth derselben? Hier ist $a = 50$, $n = 10$, $a + n = 60$, A nach der Süſsmilchschen Tabelle $= 300$, $A^{\overline{n}} = 210$, ferner $\lambda\,60$ nach den 4 Procentfuſse $= 8{,}3422$ und $\frac{1}{r^n} = 0{,}675564$. Folglich ist der gesuchte Werth $= \frac{210}{300}.\,0{,}675564.\,8{,}3422 = 3{,}9450$. Der Werth der sofort fälligen Leibrente für den Funfzigjährigen wäre $= 10{,}7961$.

Anm. Eine Person vom Alter $\overline{a+n}$ müſste, wenn sie eine Leibrente genieſsen wollte, dafür den Werth $= \lambda\,\overline{a+n}$ zahlen. Wollte sie n Jahre vorher eine solche Rente kaufen und wäre es gewiſs, daſs diese bestimmte Person das Alter $\overline{a+n}$ erreichte, so müſste sie den discontirten Werth

dieser Leibrente, d. i. $\frac{\lambda\,\overline{a+n}}{rn}$ zahlen. Da nun aber die Wahrscheinlichkeit, dass diese bestimmte Person das Alter $\overline{a+n}$ erreiche, $= \frac{A^{\overline{n}}}{A}$ ist, so ist der Werth der Leibrente für sie auch nur $= \frac{A^{\overline{n}}}{Arn}\,\lambda\,\overline{a+n}$. Hieraus ergiebt sich auch, warum die Summe, für welche die Person von 50 Jahren eine um 10 Jahre aufgeschobene Leibrente kaufen kann, nach Verlauf von zehn Jahren mit ihren Zinsen und Zinseszinsen nicht so groſs ist, daſs dafür die nämliche Rente für den Sechzigjährigen gekauft werden kann.

§. 95.

Hat man eine Tabelle so eingerichtet, wie im §. 66. angegeben worden, so kann man die aufgeschobenen Leibrenten sehr leicht finden. Wenn man nämlich im Fall, daſs a das gegenwärtige Alter des Renteniers und n die Zeit des Aufschubs bedeutet, aus der Columne für die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden die bey dem Jahre $\overline{a+n+1}$ angeführte Summe, und aus der Columne für die discontirten Zahlen der Lebenden selbst die bey dem Jahre a angeführte Zahl nimmt, und die erstere durch die letztere dividirt, so erhält man die um n Jahre aufgeschobene Leibrente für das Alter a. Nach der Einrichtung der Tabelle ist nämlich die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden bey dem Jahre $\overline{a+n+1}$

$$\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{a+n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{a+n+2}} + \frac{A^{\overline{n+3}}}{r^{a+n+3}} + \ldots = \frac{1}{r^a}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{A^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right),$$

auch ist die in der Columne für die discontirten Zahlen der Lebenden bey dem Jahre a angegebene Zahl $= \frac{A}{r^a}$. Folglich ist

$$\frac{1}{r^a}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{A^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right) : \frac{A}{r^a} = \frac{1}{A}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{A^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right) = \overline{\lambda a}^{\,\overline{n+1}}.$$

§. 96.

Wird der Werth einer um n Jahre aufgeschobenen *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Leibrente* für das Alter a gesucht, und dabey vorausgesetzt, daſs sie erst im $n+1$ Iahre mit 1 anfangen und dann jährlich mit 1 steigen solle, so ist der Werth dieser Rente =

$$\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{2A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{3A^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right) =$$

$$\frac{1}{Ar^n}\left(\frac{A^{n+1}}{r} + \frac{2A^{n+2}}{r^2} + \frac{3A^{n+3}}{r^3} + \dots\right).$$

Nun ist aber $\frac{1}{A^n}\left(\frac{A^{n+1}}{r} + \frac{2A^{n+2}}{r^2} + \frac{3A^{n+3}}{r^3} + \dots\right) = L\overline{a+n}$, also $\frac{1}{Ar^n}\left(\frac{A^{n+1}}{r} + \frac{2A^{n+2}}{r^2} + \frac{3A^{n+3}}{r^3} + \dots\right)$, oder der gesuchte Werth, $= \frac{A^n}{Ar^n} L\overline{a+n}$.

§. 97.

Würde aber angenommen, daſs die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Leibrente vom $n+1$ten Jahre so fortgehen sollte, als ob sie im Jahre a mit 1 angefangen hätte, also im ersten Jahre der Hebung bezahlt werden sollte mit $n+1$, im zweiten Jahre mit $n+2$ etc., so könnte man sie als aus zwei Theilen bestehend ansehen, nämlich aus n unveränderlichen jeder jährlich mit 1 zu zahlenden Leibrenten, und einer steigenden mit 1 anfangenden Leibrente. Der derzeitige Werth des erstern Theils für das Alter $\overline{a+n}$ ist $= n \,.\, \lambda\overline{a+n}$, der Werth des zweiten Theils für daſselbe Alter $= L\overline{a+n}$, so wie der gegenwärtige Werth der auf-

geschobenen unveränderlichen Leibrenten $=$ $\frac{A^{\overline{n}}}{Arn}\, n \,.\, \lambda\overline{a+n}$, der baare Werth der aufgeschobenen steigenden Rente aber $= \frac{A^{\overline{n}}}{Arn}\, L\,\overline{a+n}$. Folglich wird der gesuchte Werth der Leibrente, der wieder mit $\overline{La}^{\overline{n+1}}$ bezeichnet werden kann, $=$ $\frac{A^{\overline{n}}}{Arn}(n.\lambda\,\overline{a+n} + L\,\overline{a+n})$.

§. 98.

Vermittelst der in §. 82 erwähnten Hülfstabelle findet man leicht die aufgeschobenen nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrenten. Soll nämlich diese Leibrente vom $n + 1$ten Jahre an mit 1 anfangen, so nimmt man aus der Columne für die zweiten Summen der discontirten Zahlen der Lebenden die bey dem Jahre $\overline{a+n+1}$ stehende Zahl und dividirt sie mit der in der Columne für die discontirten Zahlen der Lebenden bey dem Jahre a angegebenen Zahl, wo dann der Quotient den gesuchten Werth giebt. Die zweite Summe bey dem Jahre $\overline{a+n+1}$ ist nämlich $=$ $\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{a+n+1}} + \frac{2\,A^{\overline{n+2}}}{r^{a+n+2}} + \frac{3\,A^{\overline{n+3}}}{r^{a+n+3}} + \ldots$),

die discontirte Zahl der Lebendem bey dem Alter a aber $= \frac{A}{r^a}$; folglich wird der Quotient $=$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{2A^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{3A^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right).$$

Soll die aufgeschobene steigende Leibrente im $n+1$ten Jahre mit $n+1$ anfangen, so sucht man den Werth der aufgeschobenen Rente, so als ob sie nach n Jahren mit 1 anfienge, wie eben gezeigt worden, imgleichen den Werth der aufgeschobenen unveränderlichen n Renten, wie im §. 95 angegeben ist, und addirt diese beiden Werthe, woraus man das Gesuchte $= \frac{A^{\overline{n}}}{Ar^n}(L\overline{a+n} + n.\lambda\overline{a+n})$ erhält.

§. 99.

Wenn eine *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen abnehmende Leibrente* für das Alter a um n Jahre aufgeschoben werden und dann mit $\overline{\alpha - n - 1}$ anfangen sollte, wo sie folglich mit eben so viel Thalern bezahlt würde, als wenn sie im Alter a mit $\alpha - 1$ angefangen hätte, so wäre ihr derzeitiger Werth $= (\alpha - n)\lambda\overline{a+n} - L\overline{a+n}$ (§. 91).

Folglich wird ihr baarer Werth $= \frac{A^{\overline{n}}}{A r^n}[(\alpha - n)$

$\lambda\,\overline{a+n} - L\,\overline{a+n})$. Sollte die Rente nach Verlauf der n Jahre mit $\alpha - 1$ anfangen, so hätte man

den Werth $= \frac{A^{\overline{n}}}{Ar^{a}} (\alpha.\lambda\overline{a+n} - L\,\overline{a+n})$.

§. 100.

Da der volle Werth der Leibrente aus dem gegenwärtigen Werthe derselben bis zum Ablauf des nten Jahrs und dem baaren Werthe derselben vom Anfange des Jahrs $n + 1$ an bis zum Absterben aller Interessenten nach der Mortalitätstabelle besteht, so findet man den Werth einer mit Ablauf des nten Jahrs *aufhörenden Leibrente*, wenn man von dem vollen Werthe der Leibrente für das gegebene Alter den Werth der um n Jahre aufgeschobenen Rente für dasselbe Alter abzieht. Bezeichnet man die am Ende des nten Jahrs aufhörende Leibrente mit $\overline{\lambda a}^{\,n,}$ so ist also $\overline{\lambda a}^{\,n,} = \lambda a - \overline{\lambda a}^{\,'n+1}$.

Ex. Wenn nach Süſsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfuſse von 4 Procent der Werth der nach 10 Jahreu aufhörendeu Leibrente für einen Funfzigjährigen gesucht wird, so ist der volle Werth

der Rente für dieses Alter =	10,7961,
und der Werth der um 10 Jahre aufgeschobenen Leibrente =	3,9450,
folglich die mit dem 10ten Jahre aufhörende Leibrente =	6,8511.

§. 101. a.

Dass der vorangeführte Satz auch von der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrente gelte, ist an sich einleuchtend. Da aber die so steigende Leibrente im nten Jahre mit n Rententhalern bezahlt wird, folglich die aufgeschobene Rente im $\overline{n+1}$ten Jahre mit $\overline{n+1}$ anfangen würde, so muss auch die aufgeschobene Leibrente hienach berechnet werden (§. 97). Es wird also diese Rente $= La - \frac{A^{\overline{n}}}{Arn} (n \cdot \lambda\overline{a+n} + L\overline{a+n})$.

§. 101. b.

Ebenfalls ist es klar, dass der im §. 100 angeführte Satz auch von der für das Alter a mit $\alpha - 1$ anfangenden nach der umgekehrten Ordnung der natürlichen Zahlen abnehmenden Leibrente gelte. Da indessen diese Rente, wenn sie für das Alter a mit $\alpha - 1$ anfängt, im nten Jahre mit $\overline{\alpha - n - 1}$ bezahlt werden muss, so ist der baare Werth der aufgeschobene Leibrente nach der Angabe des §. 99. zu nehmen, und die gesuchte aufhörende Leibrente wird $= \alpha\lambda a - La - \frac{A^{\overline{n}}}{Arn} [(\alpha - n)\lambda\overline{a+n} - L\overline{a+n}]$.

§. 102.

Sollte die Leibrente nach Ablauf des nten Jahrs anfangen und mit dem n + mten Jahre wieder auf-

hören, so müſste man den Werth sowohl der um n als der um n + m Jahre aufgeschobenen Leibrente suchen und den letztern von dem erstern abziehen, um den Werth der Rente für die nach Ablauf des nten Jahrs folgenden m Jahre zu erhalten.

§. 103.

Wenn ein Rentenirer verlangte, daſs seine Rente während der n ersten Jahre *aufgespart* werden sollte, so wäre der *baare* Werth dieser so aufzusparenden Leibrente gleich dem baaren Werthe einer nach n Jahren aufhörenden Leibrente, d. h. der baare Werth einer während der ersten n Jahre aufzusparenden Leibrente einer Person vom Alter a wäre $= \overline{\lambda\, a}^{n,}$. Verlangte aber der Rentenirer, daſs diese Snmme zu Ablauf der n Jahre an ihn oder seine Erben bezahlt werden sollte, so wäre der *derzeitige* accumulirte Werth der gedachten Summe $= r^n . \overline{\lambda\, a}^{n,}$, welcher Werth am Ende des nten Jahrs zu zahlen wäre, der Rentenirer mag dann leben oder nicht.

Ex. Wollte ein Funfzigjähriger seine Leibrente während der ersten 10 Jahre auf die angegebene Weise bey der Kaſse stehen laſsen, so wäre, nach Süſsmilchs Tabelle und $r = 1{,}04$ genommen, der derzeitige Werth $= 1{,}480244 \cdot 6{,}8511 = 10{,}1413$.

§. 104.

Würde aber der Rentenirer mit dem Ueberneh- mer dahin einig, daſs die in n Jahren aufzusparen- de Leibrente nach Ablauf dieser Zeit dem erstern, falls er dann noch lebte, bezahlt, sonst aber dem letz- tern zufallen sollte, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs eine bestimmte Person vom Alter a nach n Jahren noch lebe $= \frac{A^{\overline{n}}}{A}$, folglich ist in diesem Fal- le der Werth der dem nach n Jahren noch leben- den Rentenirer zu zahlenden Summe $=$

$$\frac{A}{A^{\overline{n}}}\, r^n\, \overline{\lambda\, a}^{\,n,}.$$

Ex. für diesen Fall erhält man also in dem Beispiele des vorhergehenden §., da hier $A = 300$ und $A^{\overline{n}} = 210$ ist, den Werth der aufgesparten Leibrente $= \frac{300}{210}\; 10{,}1413 = 14{,}4876$.

Anm. Wollte ein Rentenirer seine Leibrente unter der Bedingung stehen lassen, daſs er sie nachher, *so weit sie fällig geworden*, mit Zinsen und Zinseszinsen in einer Summe erhe- ben könne, so wäre dies als eine bloſse Zeitrente zu betrach- ten, und wenn der Rentenirer nach n Jahren den Werth for- derte, so wäre dieser $= p\,(r^n - 1)$. Lieſse er die Rente z. B. 10 Jahre lang stehen, so hätte er nach dem Zinsfuſse von 4 Procent zu erheben 12,0061. Dies ist mehr als in dem vor- letzten und weniger als in dem letzten Beispiele angegeben wor- den. Aber in dem vorletzten Falle (§. 103) soll die bestimm- te Summe bezahlt werden, der Rentenirer mag am Ende des nten Jahrs leben oder nicht; hier muſs er die festgesetzten n Jahre durchlebt haben, um die angegebene Summe ganz zu er-

halten. Im letzten Beispiele (§. 104) würde, wenn der Rentenirer vor der bestimmten Zeit sterben sollte, gar nichts vergütet; hier wird auf jeden Fall die bis zu dem Todestage des Rentenirers aufgelaufene Summe bezahlt.

§. 105.

Wenn zum voraus bestimmt würde, daſs die Leibrente für die ersten n Jahre stehen bleiben, dafür aber von Ablauf dieses Zeitpuncts an dem Rentenirer eine höhere Leibrente bezahlt werden sollte, so kann die vom Anfange des $n+1$ten Jahrs zahlbare Leibrente als eine um n Jahre aufgeschobene angesehn werden. So viel mal nun der baare Werth der um n Jahre aufgeschobenen Leibrente für das Alter a in dem baaren Werthe der vollen Leibrente für daſselbe Alter enthalten ist, so viel mal kann der Rentenirer jährlich einen Rententhaler vom $n+1$ten Jahre an erhalten, d. h. es verhält sich die jährliche Hebung von der nach Ablauf der Ruhejahre zu zahlenden Leibrente zu der jährlichen Hebung von der vollen Leibrente, wie der baare Werth der letztern zu dem baaren Werthe der erstern.

Sollte aber nach Ablauf von n Jahren die Leibrente jährlich nur mit 1 Rthlr. bezahlt werden, so müſste der Werth der um n Jahre aufgeschobenen Leibrente 1 gleich seyn dem Werthe der mit dem nten Jahre aufhörenden jährlich mit x zu zahlenden Leibrente, d. h. es wäre $\overline{\lambda a}^{'n+1} = (\lambda a - \overline{\lambda a}^{'n+1})\, x$, und es wäre dann die Zahlung

in jedem der ersten n Jahre oder $x = \frac{\overline{\lambda a}^{'n+1}}{\lambda a - \overline{\lambda a}^{'n+1}}$.

Ex. 1. Nach dem Vorhergehenden ist der volle Werth der Leibrente für einen Funfzigjährigen = 10,7961. Wollte dieser nun seine Leibrente während der ersten 10 Jahre stehen lassen, um dafür vom n + 1ten Jahre eine Leibrente zu ziehen, so wäre dies eben so viel als wenn er gleich für 10,7961 eine um 10 Jahre aufgeschobene Leibrente kaufte. Da nun der Werth der letztern für 1 Rthlr. = 3,9450 (§. 100.), so erhält der Rentenirer vom 11ten Jahre an eine Rente von $\frac{10,7961}{3,9450}$ = 2,7065 Rententhalern.

Ex. 2. Sollte dagegen für die nämliche Person vom Ablauf des 10ten Jahrs die Leibrente jährlich mit 1 Rthlr. bezahlt, bis dahin aber durch einen jährlichen Beitrag erkauft werden, so wäre dieser jährliche Beitrag $= \frac{\overline{\lambda\, 50}^{'11}}{\lambda\, 50 - \overline{\lambda\, 50}^{'11}} =$

$\frac{3,9450}{10,7961 - 3,9450} = 0,5758.$

Anm. Sollte der Werth der aufgesparten Leibrente bey dem Tode des Renteniers ausbezahlt werden, so gehörte die Auflösung der Aufgabe in das nächstfolgende Kapitel.

§. 106.

Es bestehe eine Gesellschaft von Personen, die

bey ihrem Eintritte vom Alter a waren; wenn sie $\overline{a + n}$ Jahre alt sind, sollen sie bis zu ihrem Tode jede eine jährliche Rente 1 beziehen, und die dazu nöthige Summe soll von den Personen unter $\overline{a + n}$ Jahren aufgebracht werden; so wie eine Person durch den Tod abgeht, tritt eine andre vom Alter a wieder ein, und die Gesellschaft ist bereits zum Beharrungszustande gekommen; es wird der Werth des Beitrags und der Werth der Rente für jeden Interefsenten gesucht. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn die Ergänzung des Alters a abgelaufen ist; wenn nun jährlich A Mitglieder eintreten, so ist dann, ohne Correction, die Zahl aller Mitglieder der Gesellschaft $= A^1 + A^2 + A^3 + \ldots + A^{\underline{x}} = \int A'^x$, die Zahl der zu pensionirenden Interefsenten $= A^{\underline{n+1}} + A^{\underline{n+2}} + A^{\underline{n+3}} + \ldots A^{\underline{x}} = \int A'^{\underline{n+1}}$, und die Zahl der contribuirenden $= \int A'^x - \int A'^{\underline{n+1}}$. Jedes contribuirende Mitglied hat also jährlich zu entrichten

$$\frac{\int A'^{\underline{n+1}}}{\int A'^x - \int A'^{\underline{n+1}}} = \frac{A^{\underline{n}}\, E\,\overline{a+n}}{A\, Ea - A^{\underline{n}}\, E\,\overline{a+n}}.$$

Da nun jeder eintretende Interefsent diesen Beitrag fortwährend bis zu Ablauf des nten Jahrs, falls er so lange lebt, erlegen soll, so ist der baare Werth

desselben $= \frac{\overset{n}{A} E \overline{a+n}}{A\,Ea - \overset{n}{A} E \overline{a+n}} \cdot \lambda a^{\overline{n,}}$, der wahre Werth der Rente für jedes Mitglied aber ist $= \lambda a^{\overline{n+1}}$. Ersterer Werth wird immer grösser seyn als der letztere, wenn nicht gleich bey der Errichtung der Gesellschaft von den ersten Mitgliedern verhältnissmässig bezahlt worden ist. Wenn z. B. $a = 60$ ist und die Pension mit dem Jahre 65 anfangen soll, so hat man, nach Süssmilch und zu 4 Procent, alles ohne Correction berechnet,

$$\frac{\overset{n}{A} E \overline{a+n}}{A\,E\,a - \overset{n}{A} E \overline{a+n}} \cdot \lambda a^{\overline{n,}} = \frac{1682}{2639 - 1682}.$$

$$(8{,}34228 - 4{,}4719) = \frac{1682}{957} \cdot 3{,}8703 = 6{,}8023.$$

Der wahre Werth ist nur $= 4{,}4719$.

Anm. Um den auf den ersten Anblick paradox scheinenden Satz, dass fortwährend von den Interessenten einer solchen Gesellschaft ein höherer Werth bezahlt werden könne, als sie nachher wieder erhalten, zu erläutern, füge ich folgendes Beispiel hinzu. Es existire eine solche Gesellschaft, worin die Pension der ältern Mitglieder lediglich durch die jährlichen Contributionen der älteren aufgebracht wird; die Mitglieder sollen bey dem Eintritt 88 Jahre alt seyn, und wenn sie 91 Jahre alt geworden sind, jeder eine Rente 1 geniessen, die von den jüngern Mitgliedern aufgebracht wird, auch soll die Gesellschaft zum Beharrungszustande gekommen seyn. Wenn nun die Anzahl der jährlich zutretenden 88jährigen Mitglieder $= 10$ ist, so ist, alles ohne Correction gerechnet, nach

der Süſsmilchschen Tabelle, die Zahl der contribuirenden Intereſsenten = 8 + 6 + 5 = 19, und die Zahl der pensionirten Mitglieder = 4 + 3 + 2 + 1 = 10; folglich soll jedes contribuirende Mitglied jährlich $\frac{10}{19}$ Rthlr. bezahlen, wenn die ältern Mitglieder jährlich jedes 1 Rthlr. erhalten sollen. Wenn nun die Geſellschaft geschloſsen werden sollte, so daſs keine neue Mitglieder weiter hinzutreten, so würde die Rechnung über das, was zu zahlen und empfangen wäre, folgendermaaſsen ausfallen.

Jahre	Zahl der Mitglieder	Zahl der contribuirenden	Zahl der pensionirten	Jüngere zahlen an $\frac{1}{19}$ Rth.	Aeltere erhalten an $\frac{1}{19}$ Rth.	Kaſse, mangel
1	29	19	10	190	190	0
2	21	11	10	110	190	80
3	15	5	10	50	190	140
4	10	0	10	0	190	190
5	6	0	6	0	114	114
6	3	0	3	0	57	57
7	1	0	1	0	19	19

Wenn die Defecte der einzelnen Jahre auf den Anfang des ersten Jahrs discontirt werden, so ist ihre Summe $= \frac{514,022}{19} = 27,054$ Rthlr. Würde man nun mit einem Entrepeneur einig, daſs die Gesellschaft zwar fortwähren und die Pensionen wie bisher den ältern Intereſsenten bezahlt, aber jedes eintretende Mitglied sofort seinen ganzen Beitrag entrichten solle, so könnte dies unter der Bedingung geschehen, daſs die jedes Jahr eintretenden 10 acht und achtzigjährigen Intereſsenten, auſser dem Werth der um 3 Jahre aufgeschobenen Leibrente, noch die Zinsen des gesammten Defects nach dem festgesetzten Zinsfuſse, hier von 4 Procent mit 1,08216, entrichten, und folglich hätte jeder eintretende Intereſsent ein für allemal zu bezahlen $\lambda\,\overline{88}|^{4} + 0,1082$. Auch findet man nach der im §. aufgestellten Formel

$$\frac{A^{\overset{n}{-}}\,\overline{E\,a+n}}{A\;E\,a - A^{\overset{n}{-}}\,\overline{E\,a+n}} \cdot \overline{\lambda\,a}|^{3} = \frac{10}{19}(2,5911-0,8825)$$

$= 0,9308$, so wie $\lambda\,\overline{88}|^{4} = 0,8225$, und es ist $0,9308 = 0,8225 + 0,1082$.., d. h. der ganze Einschuſs des eintretenden Mitgliedes ist gleich dem baaren Werthe der um 3 Jahre aufgeschobenen Leibrente und dem zehnten Theil der jährlichen Zinsen des von dem Entrepeneur zu leistenden Vorschuſses.

Das Verhältniſs ist daher eben so anzusehen, als wenn Jemand in eine verschuldete Gesellschaft eintritt, wo er verhältniſsmäſsig die Zinsen der gemeinschaftlichen Schulden mit übernehmen muſs. Gesellschaften dieser Art sind sehr gewöhnlich; sie sind aber nur dann zuläſsig, wenn die ersten Mitglieder anstatt, wie es oft der Fall ist, auf Kosten der später eintretenden zu zehren, ebenfalls einen verhältniſsmäſsigen Einschuſs erlegen, so daſs durch den daraus entstehenden Fonds die Zinsen des später entstehenden Defects in den jährlichen Bei-

trägen gedeckt werden, wo dann aber die Rechnung am bequemsten nach dem vorhergehenden §. 105 anzustellen ist.

Anm. 2. Einige allgemeine Bemerkungen über Leibrenten-Institute werden hier am besten ihren Platz finden.

Was *zuerst* die zum Grunde zu legende Sterbensordnung betrifft, so glaube ich auf die Anm. 2. zum §. 48. verweisen zu können. Da nach allen bisherigen Sterbensordnungen übrigens die Leibrenten für das Alter von 0 an bis etwa in das 9te Jahr zunehmen, von da an aber wieder abnehmen, und jetzt die Sterblichkeit in den frühern Jahren der Kindheit bey weitem nicht mehr so groſs zu seyn scheint, als sie in den Tabellen angegeben ist, so würde ich rathen, als Regel festzusetzen, daſs für jedes Kind unter 9 Jahren so bezahlt werden solle als ob es schon 9 Jahr alt wäre.

Zweitens. Bey Festsetzung des Leibrententarifs muſs man nicht auſser Acht laſsen, daſs gewöhnlich die Leibrenten, so wie sie in den Handbüchern angegeben worden, nur auf volle Jahre berechnet sind, wie im §. 63 u. folg. vorher gezeigt ist. Wenn daher, wie es gebräuchlich ist, die Leibrenten auch für die Theile des Jahrs, welche die Absterbenden jedesmal noch durchlebt haben, oder auch in mehreren Terminen bezahlt werden sollen, so muſs man die Correctionen, die in den §. §. 67 bis 73 angegeben sind, hinzufügen. Diese Correction kann beinahe $\frac{1}{2\,r}$ betragen, welches für die meisten Alter mehr ausmacht, als wenn die Personen um ein ganzes Jahr jünger wären.

Drittens. Will man den Tarif nicht für alle einzelne Altersjahre bestimmen, sondern die Personen etwa von fünf zu fünf Jahren in die nämliche Claſse ordnen, so muſs man zur Sicherheit der Kaſse festsetzen, daſs alle Personen einer und derselben Claſse (Kinder unter 9 Jahren, wovon vorher schon geredet ist, ausgenommen) den Einschuſs so als ob sie von dem jüngsten Alter dieser Claſse wären, bezahlen sollen.

Wollte man den Einsatz in jeder Clafse nach einem Durchschnitt bestimmen, so wäre dieser Einschufs für die jüngern Personen zu klein, und es wäre zu erwarten, dafs verhältnifsmäfsig mehr Personen von dem niedrigern als dem höhern Alter jeder Clafse eintreten würden.

Viertens. Will man gestatten, dafs Jemand eine aufgeschobene Leibrente durch temporäre Beiträge an die Kafse während der ersten Jahre seines Eintritts kaufe, so kann dies freilich ohne gröfseres Risico der Kafse geschehen, da, wenn der Rentenirer auch vor der Bezahlung des ganzen Werths der eventuellen Leibrente sterben sollte, zugleich die Leistung von Seiten der Kafse wegfällt. Indefsen würden in diesem Falle die jährlichen Beiträge nach dem, was vorher §. 105 angeführt worden, zu bestimmen seyn. Wenn aber A eine bestimmte Zeit lang einen jährlichen Beitrag an die Kafse entrichten wollte, um dem B eine gewifse entweder sofort laufende oder aufgeschobene Leibrente zu verschaffen, so hätte die Kafse bey diesem einen Geldgeschäfte ein zwiefaches Risico zu übernehmen, einmal, dafs A vor der mittleren Zeit stirbt, das andremal dafs B über die mittlere Zeit lebt; diese letztere Art der Bezahlung der jährlichen Beiträge könnte man also nur dann gestatten, wenn bey einem grofsen Umfange der Anstalt zu erwarten wäre, dafs der Nachtheil und Vortheil sich einigermaafsen ausgleichen.

Fünftens. Bey Anstalten von geringem Umfange müfste man ein nicht zu grofses Maximum für das Risico auf ein einziges Leben bestimmen, da sonst das kürzere oder längere Leben einer einzigen oder einiger wenigen Personen einen nachtheiligen Einflufs auf den Bestand des Instituts haben kann.

Sechstens. Bey allem dem ist es sehr rathsam, von Zeit zu Zeit die Bilanz der Anstalt aufzumachen. Aufser dem baaren Vermögen der Kafse an Geld, Effecten und Aufständen rechnet man zu dem Credit derselben den Werth der noch zu leistenden Beiträge, und zwar nach dem der Anstalt zum Grun-

gelegten Tarif und dem jedesmaligen Alter der Contribuenten. Um das Debet auszumitteln, wird zu dem gegenwärtigen Schuldenbetrag der Kaſse ebenfalls der Werth sämmtlicher zu zahlenden Leibrenten, nach dem angenommenen Tarif und dem jedesmaligen Alter der Rentenirer, hinzugefügt. Sollte auch das Credit das Debet übertreffen, so ist es doch nicht rathsam, zu Gunsten der Rentennehmer eine Veränderung in dem Tarif oder den Renten eher vorzunehmen, bis nach einer beträchtlichen Reihe von Jahren sich zeigt, daſs der Ueberschuſs fortwährend zunehme. Ist das Debet gröſser als das Credit, so muſs man die Erhöhung des Einschuſstarifs oder Herabsetzung der Leibrenten nicht zu lange aufschieben. In dieser Hinsicht ist es rathsam, gleich in dem Plane festzusetzen, daſs jeder Intereſsent sich den Verändrungen, welche die Umstände erfordern möchten, unterwerfen müſse. Dies ist auch deswegen rathsam, weil bey der zuverläſsigsten Berechnung und der vollkommensten Verwaltung doch unvermeidliche Verluste von Kapitalien eintreten, die Zinsen durch die Zeitumstände oder gesetzliche Anordnungen herabgesetzt werden können etc.

Siebentens. Hat die Kaſse Nebeneinnahmen, so ist es am zweckmäſsigsten, davon, so lange keine Unterbilanz Statt findet, den Intereſsenten temporäre Erleichterungen oder Zulagen zuzugestehen. Dies würde aber wohl im Plane gleich anfänglich zu bestimmen, und über diese Nebeneinnahmen eine besondre Rechnung zu führen seyn.

Sechstes Kapitel.

Von Anwartschaften, die vom Leben einer einzigen Person abhangen.

---

§. 107.

Eine Person vom Alter a hat *am Ende des nten Jahrs* eine Summe $= 1$ zu erwarten, wenn sie dann noch leben sollte (widrigenfalls die Zahlung ganz wegfällt); man fragt nach dem gegenwärtigen Werthe dieser Summe. Der gegenwärtige Werth eines am Ende des nten Jahrs *unbedingt* zu zahlenden Thalers ist $= \frac{1}{r^n}$, und dies würde die Summe 1 für die Person werth seyn, wenn es gewiſs wäre, daſs sie am Ende des nten Jahrs noch lebte. Da aber die Wahrscheinlichkeit, daſs sie dann noch lebe, $= \frac{\overset{n}{A}}{A}$ ist, so ist der gesuchte Werth der zu erwartenden Summe $= \frac{\overset{n}{A}}{Ar^n}$.

§. 108.

Wenn die Bedingung dahin ginge, daſs falls eine Person vom Alter a *innerhalb n Jahren sterben*

würde, die Summe 1 am Ende des $n$ten Jahrs bezahlt werden sollte; so wäre die Wahrscheinlichkeit, dafs die bestimmte Person innerhalb der gegebenen Zeit sterbe, $= \frac{A - A^{\overline{n}}}{A} = 1 - \frac{A^{\overline{n}}}{A}$, und folglich der gegenwärtige Werth der angegebenen Summe $= \frac{A - A^{\overline{n}}}{A . r^n} = \frac{1}{r^n} - \frac{A^{\overline{n}}}{A . r^n}$, d. h. gleich dem auf n Jahre discontirten unbedingten Werthe der Summe 1, weniger dem baaren Werthe auf den Fall, dafs die Person am Ende des $n$ten Jahrs noch lebt.

Wenn man $n = 1$ setzt, so hat man den hier gesuchten Werth $= \frac{A - A^{\overline{1}}}{A r} = \frac{\Delta A}{A r}$. Dies wäre also der Werth der Prämie, wenn Jemand auf den Fall, dafs er innerhalb des nächsten Jahrs sterben sollte, seinen Erben die Summe 1 zusichern, oder, wie es zuweilen ausgedruckt wird, *sein Leben* auf ein Jahr *versichern wollte*.

Ex. Für eine Person von 50 Jahren wäre diese Prämie nach Süfsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfufse von 4 Procent $= \frac{3}{100}\, 0{,}96153 = 0{,}0288$. Wollte die Person also 500 Rth. versichern, so wäre die Prämie $= 14{,}4$.

§. 109.

Wenn eine Anzahl von Personen des Alters a

übereingekommen wäre, dafs für eine jede derselben bey ihrem Absterben, und zwar am Ende des Sterbejahrs, die Summe 1 bezahlt werden sollte, so wäre überhaupt zu zahlen am Ende des ersten Jahrs ΔA, am Ende des zweiten Jahrs ΔA^{1}, des dritten Jahrs ΔA^{2} etc. und am Ende des xten Jahrs $\Delta A^{\overline{x-1}}$. Wenn man jede Zahlung auf dem Anfangstermin discontirt und die Summe dieser discontirten Zahlungen durch die anfängliche Anzahl der Personen dividirt, so erhält man den Werth der zu zahlenden Summe 1 für jede Person $=$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta A^{1}}{r^{2}} + \frac{\Delta A^{2}}{r^{3}} + \ldots + \frac{\Delta A^{\overline{x-1}}}{r^{x}}\right)$$

$= \frac{1}{Ar}\int \frac{\Delta A^{\Omega}}{r^{\Omega}}$. Dies ist eben derselbe Ausdruck, der vorhin bey Berechnung der Leibrenten schon bestimmt und dort mit ϑa bezeichnet wurde; der gedachte Werth wird künftig auch der *Sterbethaler* genannt werden.

§. 109. b.

Nach der im vorhergehenden §. aufgestellten Formel läfst sich vermittelst einer einzurichtenden Hülfstabelle der Werth des Sterbethalers für jedes Alter sehr leicht berechnen. Man dividire nämlich, um diese Hülfstabelle einzurichten, das Decrement für jedes Altersjahr vom Jahre 0 an bis zum Jah-

re z, wenn dies das höchste Altersziel ist, mit den auf einander folgenden Potenzen von r, nämlich wenn die Grundzahl der Tabelle für das Alter o mit F bezeichnet wird, ΔF^{0} mit r, ΔF^{1} mit r^{2}, überhaupt $\Delta F^{\overline{n-1}}$ mit r^{n}, und schreibe diese *discontirten Decremente* bis zum höchsten Altersziel unter einander; dann summire man diese Reihe von unten auf und setze jedesmal die Summe von m Gliedern neben das mte Glied von unten. Sucht man nun den Werth des Sterbethalers für das Alter a, wofür die Altersergänzung $= z - a = x$, und die Zahl der Lebenden $= F^{\overline{a}} = A$ ist, so nehme man aus der Tabelle die bey dem Alter a stehende Summe der discontirten Decremente und dividire dieselbe mit der zu demselben Alter gehörigen discontirten Zahl der Lebenden. Die gedachte Summe der Decremente ist nämlich $= \frac{\Delta F^{\overline{a}}}{r^{a+1}} +$

$$\frac{\Delta F^{\overline{a+1}}}{r^{a+2}} + \frac{\Delta F^{\overline{a+2}}}{r^{a+3}} + \ldots = \frac{\Delta A}{r^{a+1}} +$$

$\frac{\Delta A^{1}}{r^{a+2}} + \frac{\Delta A^{2}}{r^{a+3}} + \ldots$, so wie der Divisor $=$

$\frac{F^{\overline{a}}}{r^{a}} = \frac{A}{r^{a}}$; folglich wird der Quotient $=$

$$\left(\frac{\Delta A}{r^{a+1}} + \frac{\Delta A^{1}}{r^{a+2}} + \frac{\Delta A^{2}}{r^{a+3}} + \ldots\right) : \frac{A}{r^{a}} =$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta A^1}{r^2} + \frac{\Delta A^2}{r^3} + \ldots\right).$$

§. 110.

Da, wie oben §. 69. bereits gezeigt worden, $\vartheta a = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}$, so kann man, wenn die Leibrenten-Tabellen einmal berechnet sind, auch hieraus den Werth des Sterbethalers finden, indem man $\vartheta a = \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda a}{p}\right)$ berechnet.

Ex. Es werde der Werth des Sterbethalers für das Alter von 40 Jahren nach Süſsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfuſse zu 4 Procent gesucht; hier ist $\frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda a}{p}\right) = 0{,}96153.$ $\left(1 - \frac{13{,}1565}{25}\right) = 0{,}96153\,(1 - 0{,}52626) =$ $0{,}4555.$

§. 111.

Wollte man den Werth des Sterbethalers durch die Differenzen der Decremente bestimmen, so ist nach dem Vorhergehenden (§. 65.) $\int \frac{\Delta A^0}{r^0}$ $= pr\left(\Delta A - \frac{1}{r}\int \frac{\Delta^2 A^0}{r^0}\right)$, also, da $\vartheta a =$ $\frac{1}{Ar}\int \frac{\Delta A^0}{r^0}$ (§. 67.), auch $\vartheta a =$

$\frac{p}{A}(\Delta A - \frac{1}{r}\int\frac{\Delta^2 A^{\varrho}}{r^o})$.

Ebenfalls könnte man, anstatt dieser zweiten Differenzen der Hauptreihe, die dritten Differenzen bey Bestimmung des Sterbethalers gebrauchen. Es ist nämlich nach §. 65. $\int\frac{\Delta^2 A^{\varrho}}{r} =$

$pr(\Delta^2 A - \frac{1}{r}\int\frac{\Delta^3 A^{\varrho}}{r})$, wonach also $\vartheta a =$

$\frac{p}{A}(\Delta A - p\,\Delta^2 A + \frac{p}{r}\int\frac{\Delta^3 A^{\varrho}}{r^o}$ würde. Wollte man die vierten Differenzen gebrauchen, so hätte man auf die nämliche Weise $\vartheta a =$

$\frac{p}{A}(\Delta A - p\,\Delta^2 A + p^2\,\Delta^3 A - \frac{p^2}{r}\int\frac{\Delta^4 A^{\varrho}}{r^o})$.

Anm. Da die Differenzen keine sehr grofse Zahlen sind, und die Tabelle, wovon im §. 109. b. geredet worden, leicht zu verfertigen ist, so kann es wohl nur in dem Falle rathsam seyn, eine andre als die in dem gedachten §. 109. b. angegebene Methode zu Berechnung des Sterbethalers zu gebrauchen, wenn man jene Tabelle noch nicht hat, dagegen aber die Leibrenten-Tabellen besitzt.

§. 112.

Vorher im §. 109 ist vorausgesetzt, dafs der Sterbethaler jedesmal am Ende des Sterbejahrs bezahlt werden solle. Will man annehmen, dafs das Absterben der Personen nach einem Durchschnitt in der Mitte des Jahrs geschehe, und dafs der Sterbethaler durchgängig in der Mitte des Jahrs be-

zahlt werde; so ist der Werth defselben $= r^{\frac{1}{2}}\ \vartheta a$, wofür man auch wohl ohne beträchtlichen Fehler $\frac{r+1}{2}\ \vartheta a$ setzen könnte.

Wenn aber der Sterbethaler jedesmal in dem Augenblick, wo der Todesfall erfolgt, bezahlt und der Werth danach genau bestimmt werden soll, so ist er, übereinstimmend mit §. 34, $= \frac{\pi}{p}\ \vartheta a = \frac{\pi}{pr}\ (1 - \frac{\lambda a}{p})$. Für $r = 1{,}04$ wäre dieser Werth $= 1{,}01987\ \vartheta a$.

Anm. Tetens hat in seiner Einleitung etc. unter Num. XXI. eine Tabelle über die Werthe des Sterbethalers für jedes Alter, nach Süfsmilchs Sterbensordnung und zu 4 Procent berechnet, hinzugefügt. Er nimmt aber dabey an, dafs die Sterbethaler durchgängig im Anfange des Jahrs bezahlt werden sollen, und jeder von den dort angegebenen Werthen ist daher nach der hier gebrauchten Bezeichnung $= r\ \vartheta a$. Dies $r\ \vartheta a$ pflegt Tetens auch schlechtweg mit T zu bezeichnen, so wie er dagegen das, was hier ϑa benannt ist, durch R ausdruckt, wonach also bey ihm $T = rR$ ist. Diese Ausdrücke werden indefsen zuweilen unbestimmt, da man nicht immer gleich sieht, auf welches Alter sich T und R beziehen.

§. 113.

Sollte der Sterbethaler erst *vom* $n + 1$*ten Jahre an* bezahlt werden, falls nämlich die Person A dann erst sterben sollte, so wäre der gegenwärtige

Werth deſſelben $= \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A^{\underline{n}}}{r^{n+1}} + \frac{\Delta A^{\underline{n+1}}}{r^{n+2}} + \frac{\Delta A^{\underline{n+2}}}{r^{n+3}} + \ldots\right) = \frac{A^{\underline{n}}}{Ar^{n}} \frac{1}{A^{\underline{n}}}\left(\frac{\Delta A^{\underline{n}}}{r} + \frac{\Delta A^{\underline{n+1}}}{r^{2}} + \ldots\right) = \frac{A^{\underline{n}}}{Ar^{n}}\,\vartheta\,\overline{a+n}$, d. h. gleich dem Sterbethaler für das Alter $\overline{a+n}$, discontirt auf n Jahre und multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des nten Jahrs A noch lebe.

Wenn aber die Anwartschaft nur auf den Fall bezahlt werden sollte, daſs A *innerhalb der n Jahre stürbe*, so hätte man den Werth derselben $= \vartheta a - \frac{A^{\underline{n}}}{Ar^{n}}\,\vartheta\,\overline{a+n}$. Hiernach fände man also den Werth der Prämie, wenn ein gegebenes *Leben auf eine bestimmte Anzahl von Jahren versichert* werden sollte. Wenn z. B. a = 40 ist und die Versicherung auf 5 Jahre gehen, auch nach der Süſsmilchschen Mortalitätstabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent gerechnet werden soll, so hat man

$$\vartheta a - \frac{A^{\underline{n}}}{Ar^{n}}\,\vartheta\,\overline{a+n} = 0{,}4555 - 0{,}821927 \cdot \frac{339}{437}\, 0{,}4996 = 0{,}4555 - 0{,}3722 = 0{,}1833.$$

Wäre n = 1, so wäre es ersichtlich bequemer, die Berechnung nach §. 108. anzustellen, wo der Werth für diesen Fall $= \frac{\Delta A}{Ar}$ angegeben ist.

Uebrigens kann man den zuerst in diesem §. angegebenen Werth den *aufgeschobenen*, letzteren aber den *aufhörenden Sterbethaler* nennen.

Anm. Wenn n grösser als 1 ist, so geben der §. 108 und die zuletzt angeführte Formel des gegenwärtigen §. nicht denselben Werth, wie auch begreiflich ist. Es hängt zwar in beiden Fällen die Zahlung des Sterbethalers davon ab, dass A innerhalb der n Jahre sterbe. Nach §. 108 wird aber der Sterbethaler erst bezahlt am Ende des nten Jahrs, nach dem gegenwärtigen §. dagegen am Ende des Sterbejahrs.

§. 114.

Wollte eine Person vom Alter a ihre jährlich mit 1 zu zahlende *Leibrente während ihrer ganzen Lebzeit* bey der Kasse *stehen lassen* oder, welches dasselbe ist, während ihrer Lebzeit jährlich 1 Rth. bezahlen, wofür bey ihrem Tode eine im voraus zu bestimmende Summe bezahlt werden sollte, so müsste man, um den Werth der Summe zu finden, den Werth der Leibrente für das Alter a suchen, und dann berechnen, welche Anwartschaft auf den Tod von A dafür zu erhalten wäre, d. h. wenn die bey dem Tode der Person A zu zahlende Summe mit t bezeichnet wird, so ist $t = \frac{\lambda a}{\vartheta a}$, oder wenn die Zahlung der Anwartschaft in der Mitte des Sterbejahrs geschehen soll, $t = \frac{\lambda a}{r^{\frac{1}{2}} \vartheta a}$.

Ex. Die Person sey 40 Jahr alt, so ist der Werth ihrer Leibrente nach Süssmilchs Mortalitäts-

tabelle und zu 4 von Hundert berechnet, = 13,1565 Da nun der Werth des Sterbethalers für das Alter von 40 Jahren = 0,4555 ist, so kann die 40jährige Person für die Summe von 13,1565 für ihre Erben eine Anwartschaft auf $\frac{13,1565}{0,4555} =$ 28,884 kaufen.

Verlangte Jemand, dafs bey seinem Tode die Summe 1 ausbezahlt werden sollte, und würde die jährliche Rente gesucht, die er dafür während seines Lebens zu bezahlen hätte, so müfste man ϑa als das Kapital ansehen, womit eine Leibrente für das Alter a gekauft werden sollte, und den jährlichen Belauf dieser Rente suchen, d. h. wenn diese jährliche Rente mit l bezeichnet wird, so wäre l =

$$\frac{\vartheta a}{\lambda a} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}}{\lambda a} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\lambda a} - \frac{1}{p}\right),$$ oder

wenn der Todtenthaler in der Mitte des Jahrs zahlbar wäre, $= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{\lambda a} - \frac{1}{p}\right)$.

Sollte z. B. bey dem Tode einer vierzigjährigen Person eine Summe von 100 Rth. und zwar sofort, d. h. im Durchschnitt in der Mitte des Jahrs, bezahlt werden, so wäre $r^{\frac{1}{2}}\,\vartheta a = 0,46454$, und $\lambda a =$ 13,1565, also $l = \frac{100 \,.\, 0,46454}{13,1565} = 3,53097$.

Anm. Herr Morgan giebt in seinen Principles etc. für die Berechnung der Summe, wozu eine während der ganzen Lebzeit aufgesparte Rente mit ihren Zinsen anwächst, eine an-

dere aber unrichtige Formel. Er setzt nämlich Seite 54 und 154 diesen Werth $= \frac{A^1 + A^2 r + A^3 r^2 + \ldots + A^x r^{x-1}}{A}$

Der Beweis ist in Wesentlichem folgender. Dasjenige, was die ΔA^1 erhalten, ist, bis zu ihrem Tode, da sie am Ende des ersten Jahrs sterben, $= \Delta A^1$, was die ΔA^2 erhalten, ist, da sie am Ende des zweiten Jahrs sterben, $= \Delta A^2 (r + 1)$; eben so ist dasjenige, was ΔA^3 erhalten, $= \Delta A^3 (r^2 + r + 1)$ etc. Folglich wird der bis zu dem Tode der verschiedenen Personen accumulirte Werth der Zahlungen, über alle gleichmäfsig vertheilt,

$$= \frac{\Delta A^1}{A} + \frac{\Delta A^2}{A} + \frac{\Delta A^3}{A} + \ldots + \frac{\Delta A^{x-1}}{A}$$
$$+ \frac{\Delta A^2 r}{A} + \frac{\Delta A^3 r}{A} + \ldots + \frac{\Delta A^{x-1} r}{A}$$
$$+ \frac{\Delta A^3 r^2}{A} + \ldots + \frac{\Delta A^{x-1} r^2}{A}$$
$$+ \ldots$$
$$= \frac{A^1}{A} + \frac{A^2 r}{A} + \frac{A^3 r^2}{A} + \ldots + \frac{A^{x-1} r^{x-2}}{A},$$

Dies wäre aber ein Durchschnitt von dem, was alle Interefsenten, *einige mehr, andre weniger, einige früher, andre später, erhalten würden*, wobey die Werthe auf keinen gemeinschaftlichen Termin zurückgeführt wären, ein Durchschnitt, den man, so viel mir bekannt ist, nirgend gebraucht und nirgend gebrauchen kann, wovon auch Morgan in seinem Buche keinen Gebrauch gemacht hat, wiewohl er eine Tabelle über diese Werthe für alle Altersjahre seinem Werke angehängt hat. Was man in dieser Hinsicht lediglich gebrauchen kann, ist der gleiche

Werth, den alle Personen desselben Alters, mögen sie später oder früher sterben, bey ihrem Tode für die aufgesparte Leibrente erhalten können, und dieser ist, wie im gegenwärtigen §. angeführt worden, $= \frac{\lambda a}{\vartheta a}$. Wie groß der Unterschied beider Werthe ist, ergiebt sich schon daraus, daß zufolge Morgans Tabelle die bis an den Tod aufgesparte Rente einer dreißigjährigen Person nach der Northamptoner Sterblichkeitstafel und dem Zinsfuße von 4 Procent, = 66,029, nach der im gegenwärtigen §. angegebenen Formel aber = 54,465 ist.

§. 115.

Wenn Jemand seine jährlich mit 1 zu zahlende *Leibrente n Jahre* bey der Kasse *stehen lassen* oder, welches dasselbe ist, n Jahre, in sofern er so lange lebt, die Rente 1 bezahlen wollte unter der Bedingung, daß dafür bey seinem Tode eine zum voraus bestimmte Summe bezahlt werden sollte, so wäre die Rente als eine mit dem nten Jahre aufhörende Leibrente zu betrachten, deren Werth

$= \lambda a - \frac{A^{\overline{n}}}{A r n} \lambda \overline{a + n}$ ist. Da nun der baare Werth der Summe 1, die bey dem Tode der Person vom Alter a bezahlt werden soll, $= \vartheta a$ ist, so wird der baare Werth der Anwartschaft, die für den gedachten Belauf auf den Todesfall von A gekauft werden kann, $= \frac{\lambda a - \frac{A^{\overline{n}}}{A r n} \lambda \overline{a + n}}{\vartheta a}$.

Ex. Der baare Werth einer mit dem 10ten Jahre aufhörenden Leibrente für einen Funfzigjährigen ist nach Süſsmilchs Tabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent = 6,5811. Dagegen ist ϑa für daſselbe Alter = 0,5468, folglich wird die gesuchte Anwartschaft = $\frac{6,5811}{0,5468}$ = 12,036.

Wollte man umgekehrt wiſsen, wie groſs die mit dem nten Jahre aufhörende jährlich mit 1 zu zahlende Leibrente für die Person vom Alter a seyn müſste, wofür die Summe 1 bey ihrem Tode zu erhalten wäre, so hätte man 1 =

$$\frac{\vartheta a}{\lambda a - \frac{A^{\overline{n}}}{Arn} \lambda \overline{a + n}}.$$

Ex. Wenn wieder a = 50, n = 10 und r = 1,04, so ist nach der Süſsmilchschen Tabelle

$$\frac{\vartheta a}{\lambda a - \frac{A^{\overline{n}}}{Arn} \lambda \overline{a + n}} = \frac{0,5468}{6,5811} = 0,08308.$$

§. 116. a.

Es bestehe eine fortwährende Gesellschaft von einer bestimmten Anzahl Personen = n, mit der Verpflichtung, daſs bey dem Tode jeder Person, und zwar am Ende des Jahrs, worin sie gestorben, von jeder dann noch lebenden Person $\frac{r}{n}$ Rth. bezahlt

werde, die Personen sollen bey dem Eintritte in die Gesellschaft durchgängig vom Alter a seyn, bey dem Abgange einer derselben tritt eine andre von demselben Alter a hinzu, und die Gesellschaft ist bereits zu dem Beharrungszustande gekommen; man sucht den Werth der Zahlungen jedes Mitgliedes. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn die zu dem Alter a gehörige Ergänzung, die $= x$ seyn mag, abgelaufen ist. Wenn nun die jährlich eintretende Anzahl von Personen $= A$ ist, so ist die Anzahl der in der Gesellschaft gleichzeitig lebenden Personen der verschiedenen Alter fortwährend $= A^{\underline{1}} + A^{\underline{2}} + A^{\underline{3}} + \ldots + A^{\underline{x}}$, oder, wenn die A Personen jedes Jahr nicht auf einmal, sondern nach und nach eintreten, $= A^{\underline{1}} + A^{\underline{2}} + A^{\underline{3}} + \ldots + A^{\underline{x}} + \frac{1}{2} (\Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}})$ $= \int A'^{\underline{1}} + \frac{1}{2} A$. Ferner ist der jährliche Abgang in der Gesellschaft von den Personen $A = \Delta A$, von $A^{\underline{1}} = \Delta A^{\underline{1}}$ etc., folglich überhaupt $= \Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \Delta A^{\underline{2}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}} = A$. Also ist das Maaſs der jährlichen Sterblichkeit $=$

$$\frac{A}{\int A'^{\underline{1}} + \frac{1}{2} A} = \frac{1}{E\,a},$$

wenn nämlich für $E\,a$ der vollständige Werth genommen wird, und wenn die Anzahl der Personen aller Alter in der Gesellschaft $= n$ ist, so sterben jährlich $\frac{n}{E\,a}$ Personen. Da nun die eintretende Person vom Alter a bey

jedem Todesfall $\frac{1}{n}$ Rth., also in jedem Jahre $\frac{1}{E\,a}$ Rth. bezahlen soll, so ist der gegenwärtige Werth dieser Zahlung $= \frac{1}{E\,a}\,\lambda\,a$. Wenn also z. B. $a = 40$, so ist nach Süfsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfuſse von 4 Procent $\frac{1}{E\,a}\,\lambda\,a = \frac{1}{21{,}64}\cdot 13{,}1565 = 0{,}5811$. Wäre $a = 50$, so hätte man $\frac{1}{E\,a}\cdot\lambda\,a = \frac{1}{16{,}95}\,10{,}7961 = 0{,}6369$.

Anm. 1. Hiernach würden die gewöhnlichen Todtenkaſsen zu beurtheilen seyn, wenn dabey ein unveränderliches Alter für die Eintretenden festgesetzt wäre, und diese Anstalten zu einem Beharrungszustande gelangten. Gröſstentheils gehen sie aber schon vorher wieder unter, da die jährlichen Zahlungen den Intereſsenten zu lästig fallen, und Sicherheitsbestellung für die gehörige Berichtigung nicht wohl zu erhalten ist. Dazu kömmt noch Folgendes. Wenn eine Anstalt dieser Art erst errichtet wird, so ist die Anzahl der Sterbenden und der jährliche Beitrag gering, die Sterblichkeit und die Beiträge nehmen zu, so wie die Gesellschaft älter wird, und erreichen ihr unveränderliches Gröſstes mit Ablauf der Altersergänzung x. Die später eintretenden Mitglieder werden daher durch die früher eingegangenen vervortheilt. Der wahre mittlere Werth der bey jedem Todesfalle zu zahlenden Summe ist nach §. 109. $= \vartheta a$; bey der hier erwähnten Gesellschaft wird er aber $= \frac{\lambda\,a}{E\,a}$, und beide Werthe verhalten sich zu einander wie $\frac{1}{E\,a} : \frac{\vartheta\,a}{\lambda\,a}$. Anstalten dieser Art sind daher überall nicht zu empfehlen. Wie übrigens die Berechnung ausfällt, wenn die Gesellschaft

von Anfange an geschlofsen wäre, wird weiter unten gezeigt werden.

Anm. 2. Um die Natur solcher Gesellschaften noch näher zu erläutern, füge ich hier ein kurzes Beispiel hinzu. Es bestehe eine Gesellschaft wie die vorhin erwähnte, deren Mitglieder bey dem Eintritt 90 Jahr alt sind, und es sey bereits der Beharrungszustand eingetreten. Der Kürze wegen nehme man an, dafs die Mitglieder nicht succefsiv, sondern im Anfange des Jahrs auf einmal eintreten, und dafs folglich nach Süfsmilchs Sterbensordnung ihre Anzahl $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$, der jährliche Abgang und Zugang aber $= 6$ sey. Da nun das Absterben als continuirlich und in jedem Jahre gleichmäfsig angenommen werden mufs, so leben im Durchschnitt während des Jahrs $\frac{21 + 15}{2} = 18$ Mitglieder, die bey 6 Sterbefällen contribuiren. Soll die Leibrente für $a = 90$ hiemit zusammenstimmen, so mufs sie $=$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}}{A}\lambda(a-1) + \lambda a\right)$$ genommen werden, welches für

diesen Fall, zu 4 Procent gerechnet, $= 2{,}7209$ ist. Hiernach

wird also $$\frac{\tfrac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}}{A}\lambda\,\overline{a-1} + \lambda a\right)}{E\,a} = \frac{2{,}7209}{3}$$

$= 0{,}9069$, dagegen wird $\vartheta\,a$, wenn der Sterbethaler am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, $= 0{,}7837$. Wenn nun im Anfange eines Jahrs, nachdem der neue Zugang eingetreten ist, die Gesellschaft geschlofsen werden sollte, so wären die festgesetzten jährlichen Sterbethaler und Zahlungen folgendermaafsen zu berechnen:

Jahre	Lebende im Durchschnitt	Sterbende	Lebende zahlen $\frac{1}{12}$ Rth.	Sterbende empfangen $\frac{1}{12}$ Rth.	Deficit $\frac{1}{12}$ Rth.
1	18	6	108	180	0
2	$12\frac{1}{2}$	5	75	90	15
3	8	4	48	72	24
4	$4\frac{1}{2}$	3	27	54	27
5	2	2	12	36	24
6	$\frac{1}{2}$	1	3	18	15

Wenn man diese Defecte auf den Anfang des ersten Jahrs discontirt, so betragen sie $\frac{89,865}{11} = 4,9925$, welche zu Bestreitung der planmäſsigen Zahlungen für die Mitglieder fehlen. Wollen also die neu eintretenden Intereſsenten sich mit einem Entrepreneur darüber vereinigen, daſs sie ihre Zahlung gleich bey dem Eintritt in die Gesellschaft auf einmal abmachen, und soll die Zahlung für alle eintretenden Intereſsenten gleich seyn; so müſsen die jedes Jahr hinzukommenden sechs neuen Mitglieder nicht nur den baaren Werth des Sterbethalers ϑ a,

sondern auch die Zinsen des von dem Entrepreneur zu leistenden Vorschufses mit 0,04.4,9925 = 0,1997 bezahlen, welches letztere für Jeden 0,0332 beträgt. Folglich hat jeder eintretende Interefsent ein für allemal zu entrichten 0,8737 † 0,0332 = 0,9069, wie oben angegeben worden.

Man könnte auch sowohl die Lebensdauer als die Leibrente von a ohne Correction gebrauchen; dabey müfste man aber zugleich annehmen, dafs nur die am Ende jedes Jahrs noch lebenden Mitglieder zu den während defselben eingetretenen Sterbefällen contribuiren. Wenn nun wieder im Anfange des Jahrs 21 Interefsenten vorhanden sind, so sterben davon jährlich 6, und es contribuiren 15, folglich ist dann der planmässige Beitrag bey jedem Todesfall $= \frac{6}{15}$. Hier wird nun, wenn man wie vorhin rechnet, $\frac{\lambda a}{E a} = \frac{2,2841}{2,50} = 0,9136$. Ferner erhält man die Defecte für die verschiedenen Jahre 0, $\frac{15}{15}$, $\frac{24}{15}$, $\frac{27}{15}$, $\frac{24}{15}$ und $\frac{15}{15}$, welches, auf den Anfangstermin discontirt, $= \frac{89,865}{15} = 5,991$ ist, wovon die jährl. Zinsen zu 4 Procent 0,23964 betragen, und der auf jeden der sechs neuen Interefsenten fallende Theil = 0,03994 ist. Da nun $\vartheta a = 0,8737$, so hat man wieder ϑa † 0,03994 = 0,8737 † 0,0399 = 0,9126.

§. 116. b.

Da nach dem Vorhergehenden ϑa der Werth der Summe 1 ist, welche am Ende des Jahrs, worin A stirbt, bezahlt werden soll, so ist überhaupt, wenn zu dieser Zeit eine andre Summe = P bezahlt werden sollte, der gegenwärtige Werth dieser Summe = ϑa. P. Wenn also nach dem Tode von A eine andre Person, *dann* von dem bestimmten Alter b, die Jahr-Rente 1 auf ihre Le-

benszeit genießsen sollte, und zwar so, daſs diese Rente von dem Ablauf des Jahrs, worin A stirbt, anfinge zu laufen, so wäre der jetzige Werth dieser Leibrente $= \vartheta a \,.\, \lambda b = (\frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr}) \lambda b$; sollte die Rente aber zu Ende des Jahrs, worin A stirbt, zum erstenmal bezahlt werden, so hätte man den jetzigen Werth derselben $= r \,.\, \vartheta a \,.\, \lambda b = (1 - \frac{\lambda a}{p}) \lambda b$. Wäre z. B. A 40 Jahre alt, und sollte nach seinem Tode eine Person, *dann* 20 Jahre alt, zum Genuſs einer Leibrente, die am Ende des Sterbejahrs zuerst fällig würde, berechtigt werden; so würde nach Süſsmilchs Mortalitätstabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent der jetzige Werth $= (1 - \frac{\lambda a}{p}) \lambda b = (1 - \frac{13{,}1565}{25})$. $16{,}7905 = 7{,}9540$.

Würde anstatt P eine Rente 1 auf n Jahre gesetzt, die am Ende des Sterbejahrs zum erstenmal fällig werden sollte, so wäre der jetzige Werth $= (1 - \frac{\lambda a}{p}) p (1 - \frac{1}{r^n}) = (p - \lambda a)(1 - \frac{1}{r^n})$.

Sollte aber von der nämlichen Zeit an die Jahrrente 1 immerfort bezahlt werden, so erhielte man den gegenwärtigen Werth derselben $= (1 - \frac{\lambda a}{p}) p = p - \lambda a$.

§. 116. c.

Es soll bey dem Tode sowohl eines jetzt lebenden Nutzniessers eines Guts vom Alter a, als eines jeden Nachfolgers, der bey dem Antritt das nämliche Alter a haben soll, ein Lehngeld $= F$ bezahlt werden, man sucht den Werth dieser Zahlungen auf beständig. Nimmt man $r\vartheta a$ für den vollständigen Werth des Sterbethalers an, welche Annahme für den Fall sehr nahe zutrifft, da die Personen im Durchschnitt $a + \frac{1}{2}$ Jahre alt sind; so ist der Werth der ersten Zahlung, nämlich bey dem Tode des jetzigen Nutzniessers, $= r\vartheta a . F$, der der zweiten Zahlung wird $= r^2\vartheta a^2 F$, der dritten $= r^3\vartheta a^3 F$ etc. ins Unendliche. Folglich wird der gesammte Werth $= (r\vartheta a + r^2\vartheta a^2 + r^3\vartheta a^3 + \sim) F$. Nun ist $r\vartheta a = \frac{p - \lambda a}{p} = \frac{1}{\frac{p}{p - \lambda a}}$, und die Reihe der Potenzen dieses ächten Bruchs vom ersten Grade an ins Unendliche ist nach §. 40. $=$

$$\frac{1}{\frac{p}{p - \lambda a} - 1} = \frac{p - \lambda a}{\lambda a}.$$ Folglich wird der gesuchte Werth $= \frac{p - \lambda a}{\lambda a} . F$.

Wäre die jetzt lebende Person vom Alter b, die Nachfolger sollten aber jedesmal vom Alter a seyn, so wäre der Werth der ersten Zahlung $= r\vartheta b F$, der Werth aller folgenden Zahlungen aber $=$

$r\vartheta b. \frac{p-\lambda a}{\lambda a} F.$ Setzt man anstatt $r\vartheta b$, wie vorher, $\frac{p-\lambda b}{p}$, so hat man den gesammten Werth $=$

$$\left(1+\frac{p-\lambda a}{\lambda a}\right)\frac{p-\lambda b}{p} F. =$$

$$\frac{p}{\lambda a}.\frac{p-\lambda b}{p}.F = \frac{p-\lambda b}{\lambda a}.F.$$

Ex. Der gegenwärtige Nutznielser sey 40 Jahr alt, die Nachfolger sollen jedesmal mit dem 25sten Altersjahre eintreten und das Antrittsgeld $= 100$ seyn. Hier ist nach dem Zinsfuſse von 4 Procent und der Süſsmilchschen Sterbensordnung der gesuchte Werth $=$

$$\frac{25-13{,}1565}{15{,}987}.100 = \frac{11{,}8435}{15{,}987}.100 = 74{,}082.$$

Austatt F kann man auch den Werth der Leibrente 1 für das Alter a setzen, und man erhält dann im ersten Falle den gesuchten Werth $=$

$\frac{p-\lambda a}{\lambda a}.\lambda a = p-\lambda a$, im zweiten Falle $=$

$\frac{p-\lambda b}{\lambda a}.\lambda a = p-\lambda b$. Nimmt man hierzu die Leibrente für den gegenwärtigen Erblaſser A oder B, so hat man den ganzen Werth im ersten Falle $= p - \lambda a + \lambda a = p$, im zweiten $= p - \lambda b + \lambda b = p$, wie es seyn muſs, indem die Leibrente durch die Succeſsion eine immerwährende Rente 1 wird.

Anm. 1. Morgan giebt in seinen Principles and doctrine etc., jedoch ohne Beweis, Auflösungen mehrerer ähnlicher Aufgaben. Ich begnüge mich aber, da Fragen dieser Art auſser England sehr selten vorkommen, hier im Allgemeinen die

Methode der Auflösung anzugeben, und den Leser darauf aufmerksam zu machen, daſs anstatt λa, λb, F etc, auch Verbindungsrenten, Renten des Längstlebenden etc. gesetzt werden können. Uebrigens kann man hiemit die Aufgabe des §. 32 vergleichen.

Anm. 2. Die vorhergehenden §. §. enthalten die theoretischen Grundsätze zur zweckmäſsigen Einrichtung der *Todten-* oder *Begräbniſs-Kaſsen.* Soll nämlich bey diesen Kaſsen die Regel befolgt werden, daſs im Allgemeinen die Leistungen und Vortheile der verschiedenen Intereſsenten in dem nämlichen Verhältniſse stehen müſsen, so muſs der Werth des Todtenthalers, so wie er vorher angegeben worden, dem Tarif zum Grunde liegen. Will man nicht für jedes einzelne Altersjahr einen besondern Ansatz haben, so kann man auch hier wohl je fünf und fünf Jahre, ohne beträchtliche Ungleichheit, in eine Klaſse zusammennehmen.

Dabey ist es für die Kaſse am zuträglichsten, daſs der Werth des Todtenthalers sofort baar von dem Eintretenden erlegt werde. In diesem Falle muſs, wenn man mehrere Alters-Jahre in eine einzige Klaſse zusammenfaſst, die Taxe jeder Klaſse, zur Sicherheit der Anstalt, nach dem höchsten Alter in derselben bestimmt werden.

Will man gestatten, daſs der Werth des Sterbethalers durch jährliche Beiträge während der Lebzeit der Intereſsenten aufgebracht werde, so ist dieser Beitrag für 1 Rth. der Anwartschaft auf den Todesfall nach §. 113 $=$ $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\lambda a} - \frac{1}{p}\right)$. Auch hier muſs man, wenn Klaſsen für mehrere Altersjahre gemacht werden sollen, wieder die Taxe nach dem höchsten Alter der Klaſse bestimmen, da $\frac{1}{\lambda a} - \frac{1}{p}$ um so gröſser wird, je kleiner λa ist. Uebrigens trägt die Kaſse bey diesem Contributionsfuſse ein

zwiefaches Risico, einmal, dafs die Leistnng des Contribuenten vor der erwarteten Zeit aufhöre, zweitens dafs die Zahlung für ihn vor dieser Zeit eintrete, und man mufs auch aus diesem Grunde den Contributionsfufs möglichst zu vermeiden suchen.

Ueber mehr zusammengesetzte Begräbnifs-Kafsen sehe man Abschnitt III Kap. 5.

Dritter Abschnitt.

Von

Renten und Anwartschaften, die von zweier Personen Leben abhangen.

Erstes Kapitel.

Von

dem Zusammenleben, dem Ueberleben und längsten Leben unter zwey Personen.

§. 117.

Eine Anzahl Personen vom Alter a lebe mit einer gleichen Anzahl von Personen vom Alter b im Anfange eines Jahrs zusammen, so daſs jede Person vom Alter a mit irgend einer Person vom Alter b als ein Paar angesehen wird; man fragt, wie viel von diesen Paaren am Ende eines bestimmten nten Jahrs nach den Mortalitätstabellen noch vorhanden seyn werden.

Wenn A die Zahl der Lebenden vom Alter a und B die Zahl der Lebenden vom Alter b ist, so nehme man der Bequemlichkeit wegen an, dafs die anfängliche Anzahl der Paare = A B sey. Von A Personen des Alters a leben nun nach Verlauf von n Jahren zufolge der Tabelle noch $A^{\overline{n}}$, folglich von AB Personen noch $A^{\overline{n}}B$, dagegen sind dann von den A Personen verstorben $A - A^{\overline{n}}$, und von den AB Personen $(A - A^{\overline{n}})B$. Eben so leben von B Personen des Alters b am Schlufse des nten Jahrs noch $B^{\overline{n}}$ Personen, und folglich von A B Personen noch $AB^{\overline{n}}$, gleichfalls sind von den B Personen $B - B^{\overline{n}}$, und von den A B Personen $A(B - B^{\overline{n}})$ verstorben. Von den Personen A, die am Ende des nten Jahrs noch leben, gehört ein Theil zu den noch lebenden Personen B, der andre aber zu den bereits verstorbenen B, und da die Personen A unter sich so wie die B unter sich in Ansehung der Sterblichkeit als gleich angenommen werden, und es nur auf die Anzahl der Fälle ankömmt; so mufs die Anzahl der noch in Verbindung lebenden Personen A sich zu der Anzahl der noch lebenden B verhalten wie die Anzahl der getrennt lebenden A sich zu der Anzahl der verstorbenen B verhält (d. h., auf Ehepaare angewandt, es verhält sich die Zahl der Ehefrauen zu der Zahl der lebenden Männer wie die

Zahl der Wittwen zur Zahl der verstorbenen Männer), folglich auch, wenn das erste und dritte, so wie das zweite und vierte Glied dieser Proportion zusammengenommen werden, wie die gesammte Anzahl der noch lebenden A sich zu der anfänglichen Zahl der Personen B verhält (d. h. wie die gesammte Anzahl der noch lebenden Frauen zur anfänglichen Anzahl der Männer). Wenn also m die Zahl der am Ende des nten Jahrs bestehenden Paare bedeutet, so ist $m : A\,B^{\underline{n}} = A^{\underline{n}}\,B : A\,B$,

folglich ist $m = \frac{A\,B^{\underline{n}} \,.\, A^{\underline{n}}\,B}{A\,B} = A^{\underline{n}}\;B^{\underline{n}}$.

Wäre die anfängliche Anzahl der Paare $= P$, so wäre die Zahl der nach Verlauf von n Jahren noch bestehenden Paare $= P \,.\, \frac{A^{\underline{n}}\;B^{\underline{n}}}{A\,B}$.

§. 118.

Aufser diesen noch in Verbindung lebenden Personen giebt es nach Verlauf von n Jahren noch lebende Personen A, die mit den verstorbenen B verbunden waren, imgleichen noch lebende Personen B, die mit den verstorbenen A verbunden waren. Da nun nach dem vorhergehenden §. die Anzahl der getrennt lebenden Personen A sich zu der Anzahl der verstorbenen B verhält, wie die gesammte Zahl der noch lebenden A zu der anfänglichen Zahl der lebenden B, so ist, wenn m die Zahl der Paare, wo-

von A noch lebt und B verstorben ist, bedeutet, m :

$(B - B^{\overline{n}})\ A = A^{\overline{n}}\ B : AB$, folglich $m =$

$$\frac{(B - B^{\overline{n}})\ A . A^{\overline{n}}\ B}{AB} = A^{\overline{n}}\ (B - B^{\overline{n}}).$$

Aus dem nämlichen Grunde ist die Anzahl der Paare, von denen B noch lebt, aber A verstorben ist, $=$ $B^{\overline{n}}\ (A - A^{\overline{n}})$.

Wäre P die anfängliche Zahl der lebenden Paare, so würde nach Ablauf des nten Jahrs die Zahl der Paare, wovon A lebt und B todt ist, seyn $= P . \dfrac{A^{\overline{n}}\ (B - B^{\overline{n}})}{A\,B}$, und die Zahl der Paare, wovon B lebt und A todt ist, $= P .$

$$\frac{B^{\overline{n}}\ (A - A^{\overline{n}})}{A . B}.$$

§. 119.

Drittens giebt es nach Verlauf von n Jahren auch ganz ausgestorbene Paare, d. h. solche, wovon sowohl A als B todt ist. Auch hier verhält sich wieder die Anzahl der verstorbenen A, die zu den verstorbenen B gehören, zu der Anzahl aller verstorbenen B, wie die Anzahl der verstorbenen A, die zu den noch lebenden B gehören, zu der Anzahl aller noch lebenden B, oder (wenn wieder das 1ste und 3te, imgleichen das 2te und 4te Glied

zusammengenommen werden) wie die Anzahl aller verstorbenen A zu der Anzahl aller anfänglich vorhanden gewesenen B. Heiſst also die Zahl der verstorbenen A, die zu den verstorbenen B gehörten, m, so ist $m : A\,(B - B^{\underline{n}}) = (A - A^{\underline{n}})B : AB$, und $m = \frac{A\,(B - B^{\underline{n}})\,.\,(A - A^{\underline{n}})B}{AB}$ $= (A - A^{\underline{n}})\,(B - B^{\underline{n}})$.

Wäre die Anzahl der anfänglichen Paare = P, so wäre also die Zahl der gänzlich ausgestorbenen Paare $= P.\ \frac{(A - A^{\underline{n}})\,(B - B^{\underline{n}})}{AB}$.

§. 120.

Uebrigens erhellet es von selbst, daſs es auſser den vier Fällen, wo 1) sowohl A als B lebt, 2) A lebt und B todt ist, 3) B lebt und A todt ist, 4) sowohl A als B verstorben ist, keine mehrere Fälle gebe, und daſs, wenn alle Paare einer und derselben Zeit, bey denen irgend einer dieser Fälle Statt findet, zusammen genommen werden, sie wieder die anfängliche Anzahl der Paare ausmachen müſsen. Auch ist $A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}} + A^{\underline{n}}\,(B - B^{\underline{n}}) + B^{\underline{n}}$ $(A - A^{\underline{n}}) + (A - A^{\underline{n}})\,(B - B^{\underline{n}}) = A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}$ $+ A^{\underline{n}}\,B - A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}} + AB^{\underline{n}} - A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}}$

$+ AB - AB^{\underline{n}} - A^{\underline{n}} B + A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} = AB.$

Ex. Es sey $a = 42$, $b = 50$, so ist nach den Süſsmilchschen Tabellen $A = 360$, $B = 300$, folglich $AB = 108000$. Setzt man nun $n = 18$, so ist $A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} = 210 \cdot 132 = 27720$, $A^{\underline{n}} (B - B^{\underline{n}}) = 210 (300 - 132) = 35280$; $B^{\underline{n}} (A - A^{\underline{n}}) = 132 (360 - 210) = 19800$ und endlich $(A - A^{\underline{n}}) (B - B^{\underline{n}}) = (360 - 210) (300 - 132) = 25200$; auch ist $27220 + 35280 + 19800 + 25200 = 108000$.

Anm. Man kann diese Sätze auch durch Linien, welche die Anzahl der Personen und Parallelogramme, welche die Anzahl der Paare vorstellen, erweisen. Ich habe den rein arithmetischen Beweis, als den natürlichern, vorgezogen. Die geometrische Darstellung könnte auch nur bis zur Erläuterung der Verbindungen nach 3 fortgesetzt werden, die als Parallelepipeda betrachtet werden müſsten. Für die Verbindungen nach einem höhern Exponenten gäbe es kein Analogon in der reinen Geometrie.

§. 121.

Da nun nach dem Vorhergehenden von AB Paaren vom Alter a und b, $A^{\underline{n}} B^{\underline{n}}$ Paare am Ende des nten Jahrs bestehen, so ist für ein einziges dieser Paare die *Wahrscheinlichkeit*, bis zum Schlusse des nten Jahrs zusammenzuleben, $= \frac{A^{\underline{n}} B^{\underline{n}}}{AB}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs A noch lebe und die zugehörige Person B bereits verstorben sey, ist $= \frac{\overset{n}{A} (B - \overset{n}{B})}{A B}$. Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des nten Jahrs B noch lebe und die dazu gehörige Person A verstorben sey $= \frac{\overset{n}{B} (A - \overset{n}{A})}{A B}$.

Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Paar am Schlufse des nten Jahrs ganz ausgestorben seyn werde, $= \frac{(A - \overset{n}{A}) (B - \overset{n}{B})}{A B}$.

Diese vier Wahrscheinlichkeiten zusammengenommen sind $= 1$, welches sich auch durch die Addition derselben ergiebt.

§. 122.

Wenn man die Jahre, während welcher eine Anzahl von Paaren, bestehend aus einer Person vom Alter a und einer vom Alter b, und zwar einige mehr andre weniger, in Verbindung lebt, zusammen nimmt, und die Summe der Jahre durch die Anzahl der anfänglichen Paare dividirt, so erhält man einen Durchschnitt für die Dauer der Verbindung dieser Personen, der die *mittlere Verbindungsdauer* für Personen dieses Alters heifst.

Rechnet man nur ganze Jahre, so bestehen von A B Paaren während des ersten Jahrs $\overset{1}{A}\,\overset{1}{B}$, ferner

während des zweiten Jahrs $A^2\ B^2$, während des dritten Jahrs $A^3\ B^3$ etc. und während des yten Jahrs $A^{\underline{y}}\ B^{\underline{y}}$ Paare, wo y die Altersergänzung der ältern Person B, indem $B^{\underline{y}}$, $B^{\underline{y+1}}$ etc. $= 0$ sind. Folglich ist die Zahl aller Jahre, welche diese Paare durchleben, $= A^1\ B^1 + A^2\ B^2 + A^3\ B^3 + \ldots + A^{\underline{y}}\ B^{\underline{y}}$, und die mittlere Verbindungsdauer ist $=$

$$\frac{A^1\ B^1 + A^2\ B^2 + A^3\ B^3 + \ldots + A^{\underline{y}}\ B^{\underline{y}}}{A\ B}.$$

Will man also die mittlere Verbindungsdauer für Personen vom Alter a und b mit $E\ \overline{a\ b}$ bezeichnen, so wie die Summe von $A^1\ B^1 + A^2\ B^2 + \ldots + A^{\underline{y}}\ B^{\underline{y}}$ mit $\int(A'^1\ B'^{-1})$, so ist $E\ \overline{a\ b} = \frac{\int(A'^1\ B'^1)}{A\ B}$.

§. 123.

Soll die mittlere Verbindungsdauer durch die Decremente oder deren Differenzen ausgedruckt werden, so ist, wie eben angeführt, $E\ \overline{a\ b} =$

$$\frac{A^1\ B^1 + A^2\ B^2 + A^3\ B^3 + \ldots}{A\,.\,B} =$$

$$\frac{(A - \Delta A)\ B^1}{A\ B} + \frac{(A - \Delta A - \Delta A^1)\ B^2}{A\ B}$$

$$+ \frac{(A - \Delta A - \Delta A^1 - \Delta A^2)\ B^3}{A\ B} + \ldots$$

$$= \frac{1}{A\ B}\ A\ (B^1 + B^2 + B^3 + \ldots)$$

$$-\frac{1}{AB}\,\Delta A\,(B^1 + B^2 + B^3 + \ldots)$$

$$-\frac{1}{AB}\,\Delta A^1\,(B^2 + B^3 + \ldots)$$

$$-\frac{1}{AB}\,\Delta A^2\,(B^3 + \ldots) - \ldots$$

Da nun $\frac{1}{AB} A (B^1 + B^2 + B^3 + \ldots) = \frac{1}{B} (B^1 + B^2 + B^3 + \ldots) = E b$, d. h. gleich der mittlern Lebensdauer von B, imgleichen $B^1 + B^2 + B^3 + \ldots = \int B'^1$ so wie $B^2 + B^3 + \ldots = \int B'^2$ etc., so ist $E\,\overline{ab} =$

$$E b - \frac{\Delta A}{AB} \int B'^1 - \frac{\Delta A^1}{AB} \int B'^2 - \frac{\Delta A^2}{AB}$$

$\int B'^3$ — — etc. wo nämlich $\int B'^1$, $\int B'^2$ etc. mit B^1, B^2 etc. anfangen und bis zur Altersergänzung von B fortgehen.

Sollten anstatt derDecremente von A die Differenzen derselben gebraucht werden, so ist $\Delta A^1 = \Delta A - \Delta^2 A$, $\Delta A^2 = \Delta A - \Delta^2 A - \Delta^2 A^1$, $\Delta A^3 = \Delta A - \Delta^2 A - \Delta^2 A^1 - \Delta^2 A^2$, etc. Also wird

$$E\,\overline{ab} = E b - \frac{\Delta A}{AB} \int B'^1 - \frac{\Delta A - \Delta^2 A}{AB} \int B'^2 -$$

$$\frac{\Delta A - \Delta^2 A - \Delta^2 A^1}{AB} \int B'^3 -$$

$$\frac{\Delta A - \Delta^2 A - \Delta^2 A^1 - \Delta^2 A^2}{AB} \int B'^4 \ldots$$

oder $E\,\overline{ab} = E b - \frac{\Delta A}{AB} (\int B^1 + \int B'^2 +$

$\int B'^{\underline{1}} + ..) + \frac{\Delta^2 A}{A B} (\int B'^{\underline{2}} + \int B'^{\underline{3}} + ..) + \frac{\Delta^2 A^{\underline{1}}}{A B} (\int B'^{\underline{3}} + \int B'^{\underline{4}} + ..) + ..$, also $E\,\overline{ab} = Eb - \frac{\Delta A}{A B} \int^2 B'^{\underline{1}} + \frac{\Delta^2 A}{A B} \int^2 B'^{\underline{2}} + \frac{\Delta^2 A^{\underline{1}}}{A B} \int^2 B'^{\underline{3}} + \frac{\Delta^2 A^{\underline{2}}}{A B} \int^2 B'^{\underline{4}} + ..$ Eben so könnte man, anstatt der ersten Differenzen der Decremente, die zweiten Differenzen gebrauchen; indessen müsste man zugleich die dritten Summen von den Zahlen der Lebenden berechnen.

§. 124.

Nach den im vorhergehenden §. angeführten Formeln läfst sich die mittlere Verbindungsdauer zweier Personen ziemlich leicht finden. Zu der ersten Formel wird eine Tabelle erfordert, worin 1) die Jahre des Alters, 2) die dazu gehörigen Zahlen der Lebenden nach der Mortalitätstabelle, und 3) daneben die Summen der Lebenden, von unten auf gerechnet, und zwar so, dafs die Summe für n Glieder von unten an, neben dem nten Gliede von unten stehe, angegeben sind, so dafs also neben dem Jahre b + 1 die Summe von $B^{\underline{1}} + B^{\underline{2}} + B^{\underline{3}} + .. = \int B'^{\underline{1}}$, bey dem Jahre b + 2 die Summe $B^{\underline{2}} + B^{\underline{3}} + B^{\underline{4}} + .. = \int B'^{\underline{2}}$ etc. zu stehen hömmt. Aufserdem richtet man am bequemsten einen besondern zu der Ta-

belle passenden Streifen so ein, daſs darauf unter einander wieder die Jahre des Alters und daneben die dazu gehörigen Decremente aufgetragen werden.

Bey der Anwendung legt man den beweglichen Streifen so an die Tabelle, daſs das Jahr a des erstern neben das Jahr b + 1 der letztern zu stehen komme, wonach also auf dem Streifen und der Tabelle neben einander stehen ΔA und $\int B'^{1}$, ΔA^{1} und $\int B'^{2}$ etc. Diese neben einander stehenden Factoren vom Jahre b + 1 an bis zur Altersergänzung multiplicirt man in einander, addirt die Producte, dividirt ihre Summe durch A B, und zieht endlich diesen letzten Quotienten, der $= \frac{\Delta A}{AB} \int B'^{1} + \frac{\Delta A^{1}}{AB} \int B'^{2} + \ldots$, von E b ab.

Will man anstatt der Decremente die Differenzen derselben gebrauchen, so muſs man der erwähnten Tabelle noch eine Columne hinzufügen, worin die Summen der Summen der Lebenden, von unten an gezählt, angegeben sind, so daſs in dieser Columne bey dem Jahre b + 1, $\int^{2} B'^{1}$ etc. steht. Der bewegliche Streifen enthält, anstatt der Decremente, die Differenzen derselben, mit ihren Zeichen + oder —.

Den Streifen legt man demnächst so an die Tabelle, daſs das Jahr a des ersten neben dem Jahre b + 2 der letztern zu stehen komme, wonach also die Factoren $\Delta^{2} A$ und $\int^{2} B'^{2}$, $\Delta^{2} A^{1}$ und $\int^{2} B'$ neben einander stehen. Diese nebeneinanderstehende

Factoren vom Jahre b + 2 an bis zur Altersergänzung von b multiplicirt man in einander, addirt die Producte (wobey begreiflich die Producte aus den negativen Differenzen negativ sind) und dividirt demnächst die Summe mit A B, welchen Quotienten man dann zu E b — $\frac{\Delta A}{AB} \int^{2} B'^{1}$ addirt.

Anm. Man könnte freilich auch die oben im §. 62 angeführte Methode zu Berechnung der mittlern Lebensdauer hier anwenden, wenn ein unveränderlicher Unterschied des Alters zwischen a und b gegeben wäre, in welchem Falle man die Producte A B, $A^1 B^1$, $A^2 B^2$, etc. berechnen und demnächst rückwärts summiren könnte, um durch eine einzige Division die mittlere Verbindung zu finden. Da man indessen für jeden andern Unterschied von a und b eine andre Berechnung anstellen müßte, so wäre diese Arbeit mühsamer als jene.

§. 125.

In den vorhergehenden §. §. sind nur die vollen Jahre, welche die verbundenen Paare durchleben, in Rechnung gebracht, und es ist also so gut, als ob die Verbindungen, welche in einem jeden Jahre aufgelöset werden, gleich im Anfange desselben auf einmal abgingen. Indessen sind die Paare, welche in irgend einem Jahre getrennt werden, noch während eines kleinern oder größern Theils desselben verbunden. Wollte man zuerst annehmen, daß im Durchschnitt alle Verbindungen in der Mitte des Jahrs, worin sie aufgelöset werden, aufhören, und

bezeichnete man die Zahl der im ersten Jahre abgehenden Paare, oder $AB - A^1 B^1$, mit $\Delta (AB)$, imgleichen die im zweiten Jahre abgehenden Paare, d. i. $A^1 B^1 - A^2 B^2$, mit $\Delta (A^1 B^1)$ etc., so wäre das zu der Verbindungsdauer aller Paare hinzuzulegende Stück für das erste Jahr $= \frac{1}{2} \Delta (AB)$, füs das zweite Jahr $= \frac{1}{2} \Delta (A^1 B^1)$ etc. Für alle Jahre und über alle anfänglich existirende Paare vertheilt wird also die hinzuzulegende Gröſse $=$

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta (AB) + \Delta (A^1 B^1) + \Delta (A^2 B^2) + \ldots}{AB}$$

$= \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}$. Unter der obigen Voraussetzung wäre also die Correction für die auf ganze Jahre berechnete mittlere Verbindungsdauer $= \frac{1}{2}$.

§. 126.

Wenn aber der Abgang der einzelnen Personen in jedem Jahre für sich gleichmäſsig geschieht, so kann nicht zugleich die Trennung der Paare gleichmäſsig erfolgen, und die Correction der mittlern Verbindungsdauer nicht völlig $= \frac{1}{2}$ seyn. Man setze nämlich, daſs der Abgang der Einzelnen in n Terminen des Jahrs und zwar jedesmal im Anfange des Termins mit $\frac{1}{n}$ des Decrements erfolge, so ist die Zeit, welche sämmtliche Paare während des ersten Jahrs ungetrennt durchleben, $=$

$$\frac{1}{n} \left[(A^1 + \frac{n-1}{n} \Delta A)(B^1 + \frac{n-1}{n} \Delta B) + \right.$$

$$(A^1 + \frac{n-2}{n}\Delta A)(B^1 + \frac{n-2}{n}\Delta B) + \ldots +$$
$$(A^1 + \frac{1}{n}\Delta A)(B^1 + \frac{1}{n}\Delta B) + A^1 B^1 \Big] =$$
$$\frac{n}{n} A^1 B^1 + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots +\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}\right)(A^1 \Delta B + B^1 \Delta A) + \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)^2}{n^2} +\right.$$
$$\left.\frac{(n-2)^2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \Delta A . \Delta B = A^1 B^1 +$$
$$\frac{n-1}{2n}(A^1 \Delta B + B^1 \Delta A) + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3 n^2}$$
$$\Delta A . \Delta B. \text{ (§. 74.) } = A^1 B^1 + \frac{n-1}{2n}(A^1 \Delta B$$
$$+ B^1 \Delta A + \Delta A . \Delta B) - \frac{(n-1)(n+1)}{2.3 n^2} \Delta A . \Delta B$$
$$= A^1 B^1 + \frac{n-1}{2n} \Delta (AB) - \frac{n^2-1}{6n^2} \Delta A \, \Delta B.$$

Auf die nämliche Weise erhält man für das zweite Jahr die vollständige Dauer der Verbindungen =

$$A^2 B^2 + \frac{n-1}{2n} \Delta (A^1 B^1) - \frac{n^2-1}{6n^2} \Delta A^1 . \Delta B^1$$

etc. Nimmt man nun die Zeiten für alle Jahre zusammen und dividirt durch die anfängliche Zahl der Paare, so erhält man die *vollständige mittlere Verbindungsdauer* $= \frac{A^1 B^1 + A^2 B^2 + \ldots}{AB} +$

$$\frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\Delta (AB) + \Delta (A^1 B^1) + \ldots}{AB} -$$
$$\frac{n^2-1}{6n^2} \cdot \frac{\Delta A . \Delta B + \Delta A^1 . \Delta B^1 + \ldots}{AB} =$$

$$= E\,\overline{ab} + \frac{n-1}{2n} - \frac{n^2-1}{6n^2}\,\frac{\int\overline{\Delta A^2\,\Delta B^2}}{AB}.$$

Für $n = 2$ erhielte man also die Verbindungsdauer $= E\,\overline{ab} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\,\frac{\int\overline{\Delta A^2 . \Delta B^2}}{AB}$,

für $n = 4$ aber $= E\,\overline{ab} + \frac{3}{8} - \frac{5}{32}\,\frac{\int\overline{\Delta A^2\,\Delta B^2}}{AB}$.

Nimmt man aber $n = \infty$ an, so wird die vollständige Verbindungsdauer $= E\,\overline{ab} + \frac{1}{2} - \frac{\int\overline{\Delta A^2 . \Delta B^2}}{6\,AB}$.

Anm. Der letzte Theil ist, wenn A und B nicht zu kleine Zahlen sind, nur unbeträchtlich, und kann dann entweder ganz weggelaſsen oder auch näherungsweise nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens bestimmt werden, wo er, da $\Delta A\ \Delta B = \Delta A'\ \Delta B' = \Delta A''\ \Delta B''$ etc. $= 1$ und die Anzahl der Glieder im Zähler von $\frac{\int\Delta A^2\,\Delta B^2}{6\,AB}$ $= \beta$ ist, $= \frac{\beta}{6\,\alpha\,\beta} = \frac{1}{6\,\alpha}$ wird. Sind aber A und B verhältniſsmäſsig kleine Zahlen, so kann man diesen letzten Theil leicht seinem wahren Werthe nach bestimmen, da der Zähler dann nur wenig Glieder hat. Wenn also gleich hiernach in den meisten Fällen die Correction für die Verbindungsdauer $= \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann, so erhellet doch hieraus, daſs diese Correction noch einen Theil, nämlich $-\frac{\int\Delta A^2\,\Delta B^2}{6\,AB}$ habe, und daſs es von den Verhältniſsen der gegebenen Gröſsen abhange, ob dieser Theil der Correction weggelaſsen werden könne oder nicht.

§. 127.

Die gewöhnlichen Tabellen über die mittlere Verbindungsdauer enthalten die Werthe von 5 zu 5 Jahren. Auch ist meistens die Correction $\frac{1}{2}$ schon hinzugefügt, wogegen der zweite Theil der Correction weggelaſsen ist. Die Verbindungsdauer für die übrigen Jahre pflegt man durch Interpolation folgendermaſsen zu suchen. Gesetzt es würde die Dauer der Verbindung zwischen einer Person A vom Alter 20 und einer andern B vom Alter 37 gesucht, so ist nach der Süſsmilchschen Tabelle $E\,\overline{20.35} = 20{,}13$ und $E\,\overline{20.40} = 18{,}51$. Die Differenz für fünf Jahre in dem Alter von B ist also $= 1{,}67$, und wenn man annimmt, daſs die Differenzen der Verbindungsdauer sich innerhalb dieser Gränzen verhalten wie die Unterschiede des Alters der einen Person, so muſs man von der Verbindungsdauer für $\overline{20.35}$, $\frac{2}{5} \cdot 1{,}67 = 0{,}67$ abziehen, wonach also $E\,\overline{20.37} = 20{,}18 - 0{,}67 = 19{,}51$ wird.

Würde ferner $E\,\overline{22.37}$ verlangt, so müſste man, auſser $E\,\overline{30.37}$, auch $E\,\overline{25.37}$ suchen, welches nach derselben Regel $= 18{,}79$ gefunden wird. Dann suchte man, auf die nämliche Weise wie vorher angegeben, den Unterschied zwischen $E\,\overline{20.37}$ und $E\,\overline{25.37}$, und zöge wieder $\frac{2}{5}$ dieses Unterschieds von der ersten Verbindungsdauer ab; wodurch man $E\,\overline{22.37} = 19{,}51 - 0{,}29 = 19{,}22$ erhielte,

§. 128.

Unter der Voraussetzung des *gleichmäßsigen Absterbens* findet man die mittlere Verbindungsdauer auf folgende Weise. Es sey α die Alterserganzung der Person vom Alter a und β der Person vom Alter b, auch $\alpha\beta$ die anfängliche Anzahl der Paare, so ist, auf ganze Jahre gerechnet, nach der vorher angegebenen allgemeinen Formel $E\,\overline{a\,b} = E\,b - \frac{\Delta A}{\Delta B} \int B'^{1} - \frac{\Delta A^{1}}{AB} \int B'^{2} - \ldots$, und da, der Voraussetzung nach, $\Delta A = \Delta A^{1} = \Delta A^{2}$ etc. $= 1$, so wird die Verbindungsdauer $= E\,b - \frac{1}{\alpha\beta} \int^{2} \overline{\beta - 1}$, wo β als veränderlich angesehen und von 1 an summirt werden muſs. Nun ist $\int \overline{\beta - 1} = \frac{(\beta - 1)\beta}{2} = \frac{\beta^{2}}{2} - \frac{\beta}{2}$, und $\int^{2} \overline{\beta - 1} = \int \frac{\beta^{2}}{2} - \int \frac{\beta}{2} = \frac{\beta^{3}}{6} + \frac{\beta^{2}}{4} + \frac{\beta}{12} - \frac{\beta^{2}}{4} - \frac{\beta}{4} = \frac{\beta^{3}}{6} - \frac{\beta}{6}$, so wie E b nach der Hypothese, auf ganze Jahre gerechnet, $= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}$. Folglich wird $E\,b - \frac{1}{\alpha\beta} \int^{2} \overline{\beta - 1} = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{\beta^{3}}{6} - \frac{\beta}{6}\right) = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\beta^{2}}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha}$.

Wollte man die im §. 126. angegebene voll-

ständige Correction hinzufügen, die hier $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6\alpha}$ ist, so erhielte man die vollständige mittlere Verbindungsdauer $= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6\alpha} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha}$.

Wären beide Personen von gleichem Alter a, so würde der letztere Ausdruck $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha}{3}$.

Anm. Das nämliche Resultat ergiebt sich auch noch auf einem andern Wege. Wenn nämlich wieder α und β die Altersergänzungen der Personen sind, die ein Paar ausmachen, $\alpha\beta$ die anfängliche Anzahl der Paare und x die verflossene Zeit bezeichnet, so ist die Anzahl der Paare in jedem Augenblick $= (\alpha - x)(\beta - x)$, die Zeit, welche dieselben während eines Elements leben, $= (\alpha - x)(\beta - x)\,dx$; folglich die mittlere Verbindungsdauer $= \int \frac{(\alpha - x)(\beta - x)\,dx}{\alpha\beta}$

$$= \int dx - \int \frac{x\,dx}{\alpha} - \int \frac{x\,dx}{\beta} + \int \frac{x^2\,dx}{\alpha\beta} =$$

$x - \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x^2}{2\beta} + \frac{x^3}{3\alpha\beta}$, und da, für die ganze Verbindungsdauer $x = \beta$, als der kleinsten Altersergänzung, gesetzt werden muſs, so wird dieser letzte Ausdruck $=$

$\beta - \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{3\alpha} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha}$, wie oben.

§. 129.

Wenn man sich mit einer *Näherung* begnügen will, so kann man die Verbindungsdauer nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens und der vorhin §. 128. angegebenen Formel $\overline{\text{E a b}} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha} = \frac{\beta}{2}(1 - \frac{\beta}{3\alpha})$ berechnen, wobey jedoch α und β gleich der doppelten mittlern Lebensdauer nach der Mortalitätstafel, wofür die Rechnung gelten soll, genommen werden müſsen. Wenn also z. B. a = 15, b = 55, so ist nach Süſsmilch $\alpha = 2.38,56$, $\beta = 2.14,50$, folglich $\frac{\beta}{2}(1 - \frac{\beta}{3\alpha})$ $14,5 (1 - \frac{1,45}{115,68}) = 12,68$. Der wahre Werth ist = 13,09.

Wäre a = b = 50, so hätte man $\alpha = 2.16,95$, und die Verbindungsdauer $= \frac{\alpha}{3} = \frac{2}{3}\,16,95 = 11,30$. Der richtige Werth ist = 10,97.

Auſserdem giebt es noch eine andre Näherungsmethode. Es ist nämlich nach §. 121. die mittlere Verbindungsdauer $= \text{E b} - (\frac{\Delta A}{A B} \int B'^1 + \frac{\Delta A^1}{A B} \int B'^2 + \frac{\Delta A^2}{A B} \int B'^3 + \ldots)$. Wenn man nun zufolge der Hypothese die Decremente von A als gleich annimmt, so erhält man $\overline{\text{E a b}} = \text{E b} -$

$\frac{\Delta A}{AB}(\int B'^1 + \int B'^2 + \int B'^3 + ..)$ oder, da hier $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{\alpha}$, und $\int B^1 + \int B^2 + \int B^3 + .. = \int^2 B^1$, so hat man $E\,\overline{ab} = Eb - \frac{1}{\alpha B}\int^2 B^1$. Man nimmt also aus der vorhin in §. 124 gedachten Tabelle die zweite Summe der Zahlen der Lebenden bey dem Jahre $b + 1$, dividirt dieselbe mit αB, und zieht den Quotienten von der mittlern Lebensdauer der ältern Person ab. Wird z. B. $E\,15 . 55$ gesucht, so hat man, wie vorher schon bemerkt, nach Süfsmilchs Sterbensordnung, $\alpha = 2 . 38{,}56$, $\beta = 2 . 14{,}50$, $Eb = 14{,}50$, $B = 255$ und $\int^2 B'^1 = 37739$; folglich wird $Eb - \frac{1}{\alpha B}\int^2 B'^1 = 14{,}50$

$$- \frac{37739}{2 . 38{,}35 . 255} = 14{,}50 - 1{,}92 = 12{,}58.$$

Der wahre Werth ist, wie schon angeführt, $= 13{,}09$.

Damit man den Grad der Zuverläſsigkeit dieser Näherungsmethoden bestimmter beurtheilen könne, füge ich noch eine Tabelle über die Verbindungsdauer für verschiedene Alter hinzu.

Verbindungsdauer

Alter der verbundenen Personen.	genauer Werth	nach der Näherung 1.	nach der Näherung 2.
15.15	27,68	25,71	26,62
15.35	20,95	19,87	20,65
15.55	13,09	12,65	12,58
20.20	24,78	23,35	24,03
20.40	18,51	17,76	17,84
20.60	10,88	10,68	10,56
25.25	22,23	21,19	21,70
25.45	16,11	15,64	15,59
25.65	8,94	8,86	8,71
30.30	19,73	19,05	19,39
30.50	13,82	13,60	13,47
30.70	7,41	7,40	7,27
40.40	15,27	15,09	15,16
40.60	9,87	9,93	9,73
40.80	5,06	5,08	5,00
50.50	10,97	11,30	11,10
50.70	6,60	6,86	6,64
50.90	2,82	2,83	2,83
60.60	7,48	8,05	7,68
60.75	5,12	5,50	5,26
60.90	2,74	2,75	2,76
75.75	3,89	4,51	4,08
75.90	2,43	2,56	2,57
90.90	2,03	2,00	2,03

Aus den hier angeführten Beispielen sieht man, dafs im Ganzen genommen die Rechnung nach der zweiten Formel dem wahren Werthe näher kömmt als nach der ersten. Indeſsen können doch beide Methoden nicht sowohl bey den niedrigen und hohen Altern, als bey den mittlern angewandt werden.

§. 130.

Es ist die Verbindungsdauer für zwey Personen vom Alter a und b, oder $E\,\overline{ab}$, gegeben, man soll daraus die Verbindungsdauer für zwey um 1 Jahr ältere Personen, oder $E\,\overline{(a+1)(b+1)}$, finden. Hier ist nach dem Vorhergehenden

$E\,\overline{(a+1)(b+1)} = \frac{1}{A^1 B^1}(A^2 B^2 + A^3 B^3 +$ $A^4 B^4 + ..)$. Nun ist aber $E\,\overline{ab} = \frac{A^1 B^1}{AB} +$ $\frac{1}{AB}(A^2 B^2 + A^3 B^3 + ..)$ und $\frac{AB}{A^1 B^1} E\,\overline{ab} =$ $1 + \frac{1}{A^1 B^1}(A^2 B^2 + A^3 B^3 + ..)$, oder $\frac{AB}{A^1 B^1} E\,\overline{ab} = 1 + E\,\overline{(a+1)(b+1)}$, folglich wird $E\,\overline{(a+1)(b+1)} = \frac{AB}{A^1 B^1} E\,\overline{ab} - 1$.

Hienach findet man auch die Verbindungsdauer der um 1 Jahr jüngern Personen aus der gegebenen Verbindungsdauer zweier andern Personen. Es sey nämlich $a + 1 = c$ und $b + 1 = d$, und es gehöre zu c die Zahl der Lebenden C, so wie D zu d, so ist $a = c - 1$, und $b = d - 1$, auch $A^1 = C$ und $B^1 = D$, so wie $A = C^{-1}$ und $B = D^{-1}$. Man hat also $E\,\overline{cd} =$

$\frac{C^{-1}\,D^{-1}}{CD}\,E\,\overline{(c-1)(d-1)} - 1$, folglich

$$E\,\overline{(c-1)(d-1)} = \frac{CD}{C^{-1}\,D^{-1}}(E\,\overline{cd}+1).$$

Ex. 1. Es sey $a = 15$, $b = 20$, so ist $\overline{a+1} = 16$ und $\overline{b+1} = 21$, imgleichen nach Süſsmilchs Tabelle $A = 511$, $A^{1} = 507$, $B = 491$, $B^{1} = 486$ und $E\,\overline{ab}$ sey gegeben $= 26,2$. Also wird $E\,\overline{16.21} = \frac{511.491}{507.486}.\ 26,12 - 1 = \frac{250901}{246402}.26,12 - 1 = 25,60$.

Ex. 2. Wenn wieder $a = 15$ und $b = 20$, so ist für das um 1 Jahr jüngere Alter $a - 1 = 14$, und $b - 1 = 19$, so wie nach Süſsmilch $A^{-1} = 515$ und $B^{-1} = 495$. Folglich wird $E\,\overline{14.19} = \frac{511.491}{515.495}(26,12 + 1) = \frac{250901}{252945}\ 27,12 = 26,90$.

Anm. Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Zeit, während welcher die Hälfte der Personen eines gegebenen Alters abstirbt, die wahrscheinliche Lebensdauer dieses Alters genannt. Wollte man nun die Zeit, innerhalb welcher die Hälfte der Verbindungen zu zwey unter Personen von gegebenem Alter aufgelöset wird, die *wahrscheinliche Verbindungsdauer* nennen, so wäre dies freilich der erstern Benennung analog; indeſsen weicht diese sogenannte wahrscheinliche Verbindungsdauer noch mehr von der mittlern Verbindungsdauer ab, als die

wahrscheinliche Lebensdauer von der mittlern, und es ist davon für die Berechnung der Renten kein Gebrauch zu machen.

Wenn übrigens eine Verbindung unter zwey Personen von gleichem Alter angenommmen wird, und A die Zahl der Lebenden für das Alter a, auch x die Zahl derer Personen bezeichnet, welche davon noch leben, nachdem die Hälfte der Verbindungen aufgelöset worden, so ist $x.x. = \frac{A.A}{2}$, folglich $x = A : \sqrt[2]{2} = \frac{A}{1,4142}$. Wären also z. B. die Personen 10 Jahre alt, so wäre nach Süssmilch $A = 532$ und $x = \frac{532}{1,4142} = 376$. Die letzte Zahl gehört zu dem Alter 39,70, folglich wäre hier die sogenannte wahrscheinliche Verbindungsdauer = 29,70. Die mittlere Verbindungsdauer ist = 28,82. Wären dagegen die beiden Personen vom Alter 0, so wäre $A = 1000$ und $x = \frac{1000}{1,4142} = 707$, welche Zahl nach Süssmilch zwischen die Altersjahre 1 und 2 fällt, wonach also die Hälfte der Verbindungen schon vor Ablauf des zweiten Jahrs aufgelöset wäre. Die mittlere Verbindungsdauer für diese zwey Personen ist, = 12,14. Der Grund des beträchtlichen Unterschiedes in dem letzten Falle liegt darin, dass nach Süssmilch die Sterblichkeit in den beiden ersten Lebensjahren so bedeutend ist. Uebrigens sieht man leicht, dass es bey der sogenannten wahrscheinlichen Verbindungsdauer nur darauf ankömmt, wann die Hälfte der Paare aufgelöset ist, und dass hierbey die Dauer der dann noch bestehenden Verbindungen nicht in Betracht kömmt, dass aber die mittlere Verbindungsdauer durch die Dauer aller Verbindungen bestimmt wird.

§. 131.

Vorhin ist schon angeführt, dass es, wenn eine

fortwährende Gesellschaft von Paaren unter A und B vorausgesetzt wird, aufser den Paaren, welche noch in Verbindung leben, noch andre Paare gebe, von denen eine Person verstorben ist und die zweite lebt, oder wo eine Person die andre mitverbundene überlebt. Soll nun zuerst bestimmt werden, *wie wahrscheinlich es ist, dafs* von den zwey verbundenen Personen *A überlebe*, oder auch dafs B überlebe, so ist, wenn die anfängliche Anzahl der Paare $= A \,.\, B$ gesetzt wird, die Zahl derer Personen A, welche die mit ihnen verbunden gewesene *in dem nämlichen Jahre verstorbene* Person B überleben, am Ende des ersten Jahrs $= A^1 \Delta B$, am Ende des zweiten Jahrs $= A^2 \Delta B^1$, am Ende des dritten Jahrs $= A^3 \Delta B^2$ etc. Für alle Jahre zusammengenommen wird also die Anzahl derer A, welche am Ende des Jahrs, worin die mit ihnen verbundene Person B verstorben, noch lebten $= A^1 \Delta B + A^2 \Delta B^1 + \ldots + A^y \Delta B^{y-1}$, wo y die Alterserganzung der ältern Person ist, welche Summe mit $\int \overline{A'^1 \Delta B'^0}$ bezeichnet werden kann. Wenn man diese Gröfse durch die Anzahl der Personen A, die anfänglich existirten, dividirt, so erhält man die *Wahrscheinlichkeit, dafs A am Ende des Jahrs, worin B verstorben ist, noch lebt,* $= \dfrac{\int . \overline{A'^1 \Delta B'^0}}{A\,B}$.

Auf die nämliche Weise erhält man die Wahrscheinlichkeit, dafs B am Ende des Jahrs noch lebe, wo-

in A verstorben ist, $= \frac{\int \overline{B'^{1} \Delta A'^{0}}}{A\,B}$.

Aufser diesen A und B aber, welche am Ende des Jahrs noch lebten, worin die mit ihnen verbundene Person starb, giebt es noch andre A und B, welche zwar die mit ihnen verbundene Person einen Theil des Jahrs überlebt haben, nachher aber *in dem nämlichen Jahre selbst verstorben sind.* Die Anzahl dieser Paare im ersten Jahre ist $= \Delta A\, \Delta B$, im zweiten $= \Delta A^{1}\, \Delta B^{1}$ etc., im letzten Jahre $\Delta A^{\overline{y-1}} . \Delta B^{\overline{y-1}}$, wo y wieder die Altersergänzung der ältern Person ist. Bezeichnet man die Summe dieser Paare für alle Jahre mit $\int \overline{\Delta A^{0} \Delta B^{0}}$, und dividirt dieselbe mit der anfänglichen Zahl der Paare, so hat man die Wahrscheinlichkeit, dafs zwey verbundene Personen A und B beide in dem nämlichen Jahre sterben, $= \frac{\int \overline{\Delta A^{0}\, \Delta B^{0}}}{A\,B}$.

Nimmt man die angegebenen drey Wahrscheinlichkeiten zusammen, so ist ihre Summe $= 1$. Es ist nämlich $A^{1} \Delta B + B^{1} \Delta A + \Delta A . \Delta B = (A^{1} + \Delta A) . (B^{1} + \Delta B) - A^{1} B^{1} = \Delta (A\,B)$, ferner $A^{2} \Delta B^{1} + B^{2} \Delta A^{1} + \Delta A^{1} . \Delta B^{1} = (A^{2} + \Delta A^{1}) (B^{2} + \Delta B^{1}) - A^{2} B^{2} = \Delta (A^{1} B^{1})$ etc. Daher wird $\int \overline{A'^{1}\ \Delta B'^{0}} + \int \overline{B'^{1}\ \Delta A'^{0}} + \int \overline{\Delta A^{0} \Delta B^{0}} = \Delta (A\,B) + \Delta (A^{1} B^{1}) + \ldots = A\,B$, und $\frac{\int \overline{A'^{1}\ \Delta B'^{0}}}{A\,B}$

$$+\frac{\int B'^1 \triangle A'^0}{A\,B}+\frac{\int \triangle A'^0 \triangle B'^0}{A\,B}=\frac{AB}{AB}=1.$$

§. 132.

Die angegebenen Grössen $\frac{\int A'^1 \triangle B'^0}{A\,B}$, $\frac{\int B'^1 \triangle A'^0}{A\,B}$ und $\frac{\int \triangle A'^0 \triangle B'^0}{A\,B}$ lassen sich auch durch die Verbindungsdauern ausdrucken. Es ist nämlich $\frac{\int A'^1 \triangle B'^0}{A\,B}=$

$$\frac{A^1\,(B-B^1)+A^2\,(B^1-B^2)+\ldots}{A\,B}=$$

$$\frac{A^1 B^0+A^2 B^1+\ldots}{A\,B}-\frac{A^1B^1+A^2\,B^2+\ldots}{A\,B}$$

$$=\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\;\frac{A^1 B^0+A^2 B^1+\ldots}{A\,B^{\overline{-1}}}-E\,\overline{ab}=$$

$\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,E\,\overline{a\,(b-1)}-E\,\overline{a\,b}$. Auf ähnliche Weise erhält man $\frac{\int B'^1 \triangle A'^0}{A\,B}=$

$$\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,E\,\overline{(a-1)\,b}-E\,\overline{a\,b}.$$

Ferner ist $\frac{\int \triangle A'^0 \triangle B'^0}{A\,B}=$

$$\frac{(A-A^1)(B-B^1)+(A^1-A^2)\,(B^1-B^2)+\ldots}{A\,B}$$

$$= \frac{AB + A^1B^1 + \ldots}{AB} - \frac{A^0B^1 + A^1B^2 + \ldots}{AB}$$

$$- \frac{A^1B^0 + A^2B^1 + \ldots}{AB} + \frac{A^1B^1 + A^2B^2 + \ldots}{AB}$$

$$= 1 + E\overline{ab} - \frac{A^{-1}}{A}\,E\overline{(a-1)\,b} -$$

$$\frac{B^{-1}}{B}\,E\overline{a\,(b-1)} + E\overline{ab} = 1 + 2\,E\overline{ab} -$$

$$\frac{A^{-1}}{A}\,E\overline{(a-1)\,b} - \frac{B^{-1}}{B}\,E\overline{a\,(b-1)}.$$

Anm. $\int A^{x}\,\Delta B^{x-1}$ druckt die Zahl derer Paare aus, von denen am Ende jedes Jahrs A lebt, B aber in dem nämlichen Jahre gestorben ist. Man kann bey der Bestimmung des Ueberlebens von A auch die Anzahl derer Paare zum Grunde legen, von denen A in jedem Jahre stirbt, B aber schon vorher gestorben ist. Will man auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A bestimmen, so ist der Ausdruck dafür bis zu Ablauf der Altersergänzung x von A =

$$\frac{\overline{\int \Delta A^{x-1}\,(B - B^{x-1})}}{AB}, \text{ Dies ist } =$$

$$\frac{\int \Delta A^{x-1}}{A} - \frac{\overline{\int \Delta A^{x-1} \,.\, B^{x-1}}}{AB} = 1 -$$

$$\frac{\overline{\int \Delta A^{x-1} \,.\, B^{x}}}{AB} - \frac{\overline{\int \Delta A^{x-1} \,.\, \Delta B^{x-1}}}{AB},$$

Nun ist $\frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}}\, B^{\underline{x}}}}{A\,B}$ die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von B über A, und $\frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}} . B^{\underline{x}}}}{A\,B}$ $+ \frac{\overline{\int \Delta B^{\underline{x-1}} . A^{\underline{x}}}}{A\,B} + \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}} . \Delta B^{\underline{x-1}}}}{A\,B}$ $= 1$; folglich ist $1 - \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}} . B^{\underline{x}}}}{A\,B}$ $- \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}} . \Delta B^{\underline{x-1}}}}{A\,B} = \frac{\overline{\int A^{\underline{x}}\, \Delta B^{\underline{x-1}}}}{A\,B}$.

Wollte man die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A ausdrucken durch $\frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}}\,(B - B^{\underline{x}})}}{A\,B}$, so wäre dieser Ausdruck $= \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}}}}{A} - \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}} . B^{\underline{x}}}}{A\,B}$ $= 1 - \frac{\overline{\int \Delta A^{\underline{x-1}}\, B^{\underline{x}}}}{A\,B}$, d. h. gleich 1, weniger der Wahrscheinlichkeit, dafs B überlebt A, worin also noch der Fall, dafs beide in demselben Jahre sterben, mitbegriffen ist. Wenn man also diesen letzten Ausdruck gebraucht, so mufs man nicht aufser Acht lafsen, dafs er für den wahren Werth zu grofs, so wie der im Texte angegebene für den wahren Werth zu klein ist.

§. 133.

Soll die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens nicht blofs auf ganze Jahre, sondern auf Theile des Jahrs berechnet werden und ist die Anzahl dieser Theile $= n$, so wird die Zahl der überlebenden A im ersten Jahre $= (A^{1} + \frac{n-1}{n} \Delta A) \frac{\Delta B}{n} + (A^{1} + \frac{n-2}{n} \Delta A) \frac{\Delta B}{n} + \ldots + (A^{1} + \frac{1}{n} \Delta A) \frac{\Delta B}{n} + \frac{A^{1} \Delta B}{n} = \frac{n A^{1} \Delta B}{n} + \frac{\Delta A . \Delta B}{n . n} (\overline{n-1} + \overline{n-2} + \ldots + 1) = A^{1} \Delta B + \frac{n-n}{2n} \Delta A \Delta B.$ Eben so erhält man für das zweite Jahr die Zahl der überlebenden $A = A^{2} \Delta B^{1} + \frac{n-1}{2n} \Delta A^{1} \Delta B^{1}$ etc. Wenn man die Anzahl aller Jahre zusammennimmt, und die Summe durch $A B$ dividirt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dafs A überlebe $B = \frac{\int \overline{A'^{1} \Delta B'^{0}}}{A B} + \frac{n-1}{2n} \frac{\int \overline{\Delta A^{0} . \Delta B^{0}}}{A B}$. Wird aber $n = \infty$ gesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von $A =$

$$\frac{\int \overline{A'^{1} \Delta B'^{0}}}{A B} + \frac{\int \overline{\Delta A^{0} . \Delta B^{0}}}{2 A B} = \frac{B^{\overline{-1}}}{B} E \overline{a(b-1)}$$

$$- E \overline{a b} + \tfrac{1}{2} + E \overline{a b} - \frac{B^{\overline{-1}}}{2 B} E \overline{a(b-1)} -$$

$\frac{A^{\overline{-1}}}{2A} E\overline{(a-1)b} = \frac{1}{2}[1 + \frac{B^{\overline{-1}}}{B} E\overline{a(b-1)}$

$- \frac{A^{\overline{-1}}}{A} E\overline{(a-1)b}]$. Auf dem nämlichen Wege findet man die Wahrscheinlichkeit, daſs, auf $\frac{1}{n}$ Theile des Jahrs gerechnet, B überlebe A, $=$ $\frac{\int\overline{B'^{1} \Delta A'^{2}}}{AB} + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\int\overline{\Delta A'^{2} \Delta B^{2}}}{AB}$, und wenn $n =$ ∞ ist, $= \frac{\int\overline{B'^{1} \Delta A'^{2}}}{AB} + \frac{\int\overline{\Delta A'^{2} . \Delta B^{2}}}{2AB} = \frac{1}{2}[1 +$ $\frac{A^{\overline{-1}}}{A} E\overline{(a-1)b} - \frac{B^{\overline{-1}}}{B} E\overline{a(b-1)}]$.

Die Anzahl der Fälle, wo A und B in dem nämlichen Zeittheile sterben, ist für den nten Theil des Jahrs $= \frac{\Delta A . \Delta B}{n^2}$, folglich für alle n Theile des Jahrs zusammengenommen $= \frac{\Delta A \Delta B}{n}$, welches, wenn n unendlich groſs ist, $= 0$ wird. Es ist nämlich in diesem Falle die Hälfte von $\frac{\int\overline{\Delta A'^{2} . \Delta B'^{2}}}{AB}$ in der Wahrscheinlichkeit, daſs A überlebe, und die andre Hälfte in der Wahrscheinlichkeit, daſs B überlebe, mit enthalten.

Ex. Es sey $a = 40$, $b = 50$, man sucht die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens für jede Person.

Hier ist nach Süſsmilch $\frac{\int \overline{A'^{1} . \varDelta B'^{0}}}{AB} =$

$\frac{308}{300}$ E. $\overline{40 . 49}$ — E. $\overline{40 . 50}$ = $\frac{308}{300}$ 12,47 — 12,20 = 0,60. Ferner ist $\frac{\int \overline{B'^{1} \varDelta A'^{0}}}{AB} =$

$\frac{381}{374}$ E $\overline{39 . 50}$ — E. $\overline{40 . 50}$ = $\frac{381}{374}$ 12,32 — 12,20 = 0,35.

Noch ist $\frac{\int \overline{\Delta A^{0} \Delta B^{0}}}{AB}$ = 1 + 2 E $\overline{40 . 50}$ — $\frac{308}{300}$ E $\overline{40 . 49}$ — $\frac{381}{374}$ E $\overline{39 . 50}$ = 1 + 24,40 —(12,80 + 12,55) = 0,05. Also wird die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A über B = 0,60 + 0,025 = 0,625, und des Ueberlebens von B über A = 0,35 + 0,025 = 0,375. Und beide Wahrscheinlichkeiten zusammengenommen sind = 1.

§. 134.

Wenn bey der Hypothese des *gleichmäſsigen Absterbens* α und β die Altersergänzungen und zugleich die anfängliche Zahl der Lebenden für beide verbundenen Personen bedeuten, auch $\alpha > \beta$ ist, so wird hier $\frac{\int \overline{A'^{1} \Delta B'^{0}}}{AB} =$

$\frac{\overline{\alpha - 1} + \overline{\alpha - 2} + \ldots + \overline{\alpha - \beta}}{\alpha \beta}$, indem $\int A'^{1} \Delta B'^{0}$ hier nur so viele Glieder haben kann als β Einheiten, und alle Decremente = 1 angenom-

men werden. Nun ist $\frac{\overline{\alpha-1}+\overline{\alpha-2}+\ldots+\overline{\alpha-\beta}}{\alpha\beta}$ $= \frac{\beta}{2}\,\frac{(2\alpha-\beta-1)}{\alpha\beta} = 1 - \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}$, und dies ist die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A auf volle Jahre gerechnet. Ferner ist $\frac{\int \overline{B'^{1}\;\Delta A'^{2}}}{A\;B} = \frac{\overline{\beta-1}+\overline{\beta-2}+\ldots+1}{\alpha\beta}$ $= \frac{(\beta-1)\,\beta}{2\,\alpha\beta} = \frac{\beta}{2\,\alpha} - \frac{1}{2\,\alpha}$; dies ist die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von B, auf ganze Jahre gerechnet.

Noch ist $\frac{\int \overline{\Delta A'^{2}\;\Delta B'^{2}}}{A\,B} = \frac{1+1+1\ldots}{\alpha\beta}$, welches, da die Anzahl der Glieder im Zähler $=\beta$ ist, $= \frac{\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}$ wird, und dies ist die Wahrscheinlichkeit, daſs A und B in dem nämlichen Jahre sterben. Folglich wird die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A $= 1 - \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}$ $+ \frac{1}{2\alpha} = 1 - \frac{\beta}{2\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}$ E b, so wie die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von B $= \frac{\beta}{2\,\alpha} - \frac{1}{2\,\alpha} + \frac{1}{2\,\alpha} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ E b. Beide Wahrscheinlichkeiten zusammen sind wieder $= 1$.

Anm. Sonst könnte man die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens nach der Hypothese auch durch die Inte-

gralrechnung finden. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A $= \frac{\int(\alpha - x)\,dx}{\alpha\ .\ \beta}$ und die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von B $= \frac{\int(\beta - x)\,dx}{\beta\ \ \alpha}$, wo dx der Abgang von A oder B in einem Zeitelemente ist. Ersteres wird $= \frac{x}{\beta} - \frac{x^2}{2\,\alpha\beta}$, letzteres $= \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\,\alpha\beta}$. Setzt man $x = \beta$, als der kleinsten Altersergänzung, so erhält man das Ueberleben von A $= 1 - \frac{\beta}{2\alpha}$ und das Ueberleben von B $= \frac{\beta}{2\alpha}$.

Uebrigens ist hier durchgängig bestimmt worden, wie viel A leben zu der Zeit, da ihre zugehörigen B sterben. Bey dieser Rechnung erhält man schon diejenigen A mit, welche etwa noch eine Zeitlang nach dem Tode aller B leben, und die Rechnung ist gleich vollständig. Wenn man dagegen suchen wollte, welche A sterben, nachdem die mitverbundenen B bereits abgegangen sind, so erhielte man zwar den Werth für das Ueberleben der ältern Person durch eine einzige Berechnung vollständig; für das Ueberleben der jüngern Person müſste man aber zwey Berechnungen anstellen, indem das Absterben der A nach dem Ablauf der kleinsten Altersergänzung β fortwährt. Es ist nämlich, auf diese Weise gerechnet, das Ueberleben von B $= \int \frac{x\,dx}{\alpha\beta} = \frac{x^2}{2\,\alpha\beta}$ und, wenn $x = \beta$ gesetzt wird, $= \frac{\beta}{2\,\alpha}$, wie vorhin. Das Ueberleben

von A erhält man $\int \frac{x\,dx}{\beta\,\alpha}$, ebenfalls $= \frac{\beta}{2\,\alpha}$ für $x = \beta$. Da indessen nach Ablauf der Zeit β noch $\alpha - \beta$ Personen von A leben, welche alle nach B versterben, so muss man zu dem Ueberleben von A noch hinzulegen $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$, wonach die vollständige Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A $= 1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{2\,\alpha} = 1 - \frac{\beta}{2\,\alpha}$ wird, wie vorher. Es ist daher bequemer, bey Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens *auf die ganze Dauer der Coexistenz* das Leben einer Person bey dem Tode der andern, als das Absterben der einen Person nach dem Tode der andern zum Grunde zu legen.

§. 135.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, dass B zuerst stirbt, *auf eine bestimmte Zeit*, kleiner als die Altersergänzung der überlebenden Person, sucht, so ist es nicht dasselbe, ob man annimmt, dass A überlebt habe B, oder dass A gestorben sey nach B. Von denjenigen A, die in irgend einem Jahre durch den Tod von B getrennt worden, leben nämlich einige noch eine Zeit lang, und es ist daher *für bestimmte Jahre* die Wahrscheinlichkeit, dass A überlebe B, grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass A gestorben sey nach B.

Die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des nten Jahrs A überlebt habe B, ist, auf ganze Jahre ge-

rechnet, $= \frac{A^{1} \Delta B + A^{2} \Delta B^{1} + \ldots + A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{A \cdot B}$

$= \frac{\int A^{\overline{n}} B^{\overline{n-1}}}{A B} - \frac{\int A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}}{A B}$. Auf augenblickliche Theile des Jahrs wird das gesuchte Ueberleben $=$

$$\frac{A^{1} \Delta B + A^{2} \Delta B^{1} + \ldots + A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{A B} +$$

$$\frac{\Delta A \Delta B + \Delta A^{1} \Delta B^{1} + \ldots \Delta A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{2 A B},$$

oder auch $= \frac{A \Delta B + A^{1} \Delta B^{1} + \ldots + A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{A B}$

$$- \frac{\Delta A \Delta B + \Delta A^{1} \Delta B^{1} + \ldots + \Delta A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{2 A B}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des nten Jahrs A gestorben sey, nachdem B vorher abgegangen war, ist, auf ganze Jahre gerechnet, $=$

$$\frac{\Delta A^{1}(B - B^{1}) + \Delta A^{2}(B - B^{2}) + \ldots + \Delta A^{\overline{n-1}}(B - B^{\overline{n-1}})}{A \cdot B}.$$

Auf augenblickliche Theile des Jahrs gerechnet, wird diese Wahrscheinlichkeit aber $=$

$$\frac{\Delta A^{1}(B - B^{1}) + \Delta A^{2}(B - B^{2}) + \ldots + \Delta A^{\overline{n-1}}(B - B^{\overline{n-1}})}{A B}$$

$$+ \frac{\Delta A \Delta B + \Delta A^{1} \Delta B^{1} + \ldots + \Delta A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}}{2 A B}$$

oder auch =

$$\frac{\Delta A(B-B^{\underline{1}})+\Delta A^{\underline{1}}(B-B^{\underline{2}})+\ldots+\Delta A^{\underline{n-1}}(B-B^{\underline{n}})}{AB}$$

$$-\frac{\Delta A\,\Delta B+\Delta A^{\underline{1}}\,\Delta B^{\underline{1}}+\ldots+\Delta A^{\underline{n-1}}\,\Delta B^{\underline{n-1}}}{2\,AB}$$

Der Unterschied beider Wahrscheinlichkeiten ist $=\frac{A\,\Delta B+A^{\underline{1}}\,\Delta B^{\underline{1}}+\ldots+A^{\underline{n-1}}\,\Delta B^{\underline{n-1}}}{AB}$

$$-\frac{\Delta A(B-B^{\underline{1}})+\Delta A^{\underline{1}}(B-B^{\underline{2}})+\ldots+\Delta A^{\underline{n-1}}(B-B^{\underline{n}})}{AB}$$

$$=\frac{AB+A^{\underline{1}}B^{\underline{1}}+\ldots+A^{\underline{n-1}}B^{\underline{n-1}}}{AB}-$$

$$\frac{AB^{\underline{1}}+A^{\underline{1}}B^{\underline{2}}+\ldots+A^{\underline{n-1}}B^{\underline{n}}}{AB}-$$

$$\frac{(\Delta A+\Delta A^{\underline{1}}+\ldots+\Delta A^{\underline{n-1}})B}{AB}+$$

$$\frac{AB^{\underline{1}}+A^{\underline{1}}B^{\underline{2}}+\ldots+A^{\underline{n-1}}B^{\underline{n}}}{AB}-$$

$$\frac{A^{\underline{1}}B^{\underline{1}}+A^{\underline{2}}B^{\underline{2}}+\ldots+A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}}{AB}=$$

$$\frac{AB}{AB}-\frac{A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}}{AB}-\frac{(A-A^{\underline{n}})B}{AB}$$

$$=1-1+\frac{A^{\underline{n}}B}{AB}-\frac{A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}}{AB}=$$

$\frac{(B - B^{\underline{n}})\, A^{\underline{n}}}{A\, B}$, wo der Zähler diejenigen A bezeichnet, welche, nachdem sie von ihrem mitverbundenen B getrennt worden, am Ende des nten Jahrs noch leben. Wenn man also die Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des nten Jahrs A überlebt habe B, mit η, und daſs A gestorben sey nach B, mit ε bezeichnet, so ist $\eta = \varepsilon + \frac{(B - B^{\underline{n}})\, A^{\underline{n}}}{A\, B}$, so wie $\varepsilon = \eta - \frac{(B - B^{\underline{n}})\, A^{\underline{n}}}{A\, B}$, und man kann hiernach die eine Wahrscheinlichkeit aus der andern finden.

Setzt man übrigens n gleich der Alterserganzung der überlebenden Person A, so wird $A^{\underline{n}} = 0$ und $\frac{(B - B^{\underline{n}})\, A^{\underline{n}}}{A\, B} = 0$, d. h. für diese Zeit sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich, da nun alle A, welche B überlebt haben, abgestorben sind.

Da ferner die Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des nten Jahrs von einem Paare A B irgend eine Person gestorben sey, $= \frac{A\,B - A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{AB} = 1 - \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\, B}$ ist, so hat man die Wahrschein-

lichkeit, daſs zu dieser Zeit B überlebt habe A, =

$$1 - \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\,B} - \eta \text{ (}\eta\text{ wie vorher genommen).}$$

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, daſs am Ende des nten Jahrs von einem Paare A B beide Intereſsenten gestorben sind =

$$\frac{(A - A^{\underline{n}})\,(B - B^{\underline{n}})}{A\,B} = 1 - \frac{A^{\underline{n}}}{A} - \frac{B^{\underline{n}}}{B}$$

$$+ \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\,B},$$ also ist die Wahrscheinlichkeit, daſs zu dieser Zeit B gestorben sey nach A, =

$$1 - \frac{A^{\underline{n}}}{A} - \frac{B^{\underline{n}}}{B} + \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\,B} - \varepsilon \text{ (}\varepsilon\text{ wie}$$

vorher genommen).

Anm. Morgan meint in seinen Principles S. 190 & 191, daſs auch auf die ganze Lebensdauer der ältern Person B ein Unterschied sey zwischen der Wahrscheinlichkeit, daſs B überlebe A und daſs B sterbe nach A, welchen Unterschied er zu

$$\frac{(A - A^{\underline{y-1}})\, B^{\underline{y-1}}}{AB}$$ angiebt, wo y die Alterserganzung von B ist. So wie indeſsen der Natur der Sache nach kein Unterschied zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeiten seyn kann, giebt auch die im §. angeführte Formel die Gleichheit dieser Gröſsen, indem für das letzte Jahr der Altersergänzung

der Unterschied $= \frac{(A - A^{\underline{y}})\, B^{\underline{y}}}{A\,B} = 0$ wird.

Wenn aber B die jüngere Person wäre und die Wahrscheinlichkeit ihres Absterbens nach der ältern A bis zum gänzlichen

Abgange der A gesucht würde, so wäre $\frac{(A - \overset{n}{A}) \overset{n}{B}}{A B}$

$$= \frac{A \overset{n}{B}}{A B} = \frac{\overset{n}{B}}{B}.$$

§. 136.

Wenn man eine Reihe der Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens oder auch des Sterbens einer Person nach dem Tode einer andern *für eine bestimmte Zeit* gebraucht, so ist es am bequemsten, die Wahrscheinlichkeit des Sterbens der ältern Person nach dem Tode der jüngern zu berechnen, wobey man auf folgende Weise verfahren kann. Wie vorher angeführt, ist die vollständige Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende der Zeit n, A gestorben nach B, =

$$\frac{\Delta A(B - \overset{1}{B}) + \Delta \overset{1}{A}(B - \overset{2}{B}) + \ldots + \Delta \overset{n-1}{A}(B - \overset{n}{B})}{A B}$$

$$- \frac{\Delta A \Delta B + \Delta \overset{1}{A} \Delta \overset{1}{B} + \ldots + \Delta \overset{n-1}{A} \Delta \overset{n-1}{B}}{2 A B}$$

$$= \frac{\Delta A \Delta B + \Delta \overset{1}{A} \int \Delta \overset{1}{B} + \Delta \overset{2}{A} \int \Delta \overset{2}{B} + \ldots + \Delta \overset{n-1}{A} \int \Delta \overset{n-1}{B}}{A B}$$

$$- \frac{\Delta A \Delta B + \Delta \overset{1}{A} \Delta \overset{1}{B} + \ldots + \Delta \overset{n-1}{A} \Delta \overset{n-1}{B}}{2 A B},$$

wo die Summen der Decremente von B im ersten Theile sämmtlich mit $\Delta \overset{0}{B}$ anfangen und bis zu dem bezeichneten Theile fortgehen. Man schreibe

also die Decremente von A, von ΔA^0 an bis ΔA^{n-1}, unter einander, und daneben eben so die gleichnamigen Decremente von B. Dann summire man in einer dritten Columne die Decremente von B von oben an und multiplicire jede Summe dieser Decremente von B in das nebenstehende Decrement von A. Endlich summire man auch diese Producte von oben an, wodurch man für jedes nte Jahr die Gröſse $\int . \Delta A^{n-1} . \int \Delta B^{n-1}$ erhält. Ferner multiplicire man auch die gleichnamigen Decremente von A und B in einander, setze die Producte in eine besondre Columne, und summire diese Producte wieder von oben, so daſs man auch $\int . \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1}$ bekomme. Dann zieht man von der erstern Summe die Hälfte der letztern ab, und dividirt den Rest durch A B, so wird der Quotient =

$$\frac{\int . \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-1} - \frac{1}{2} \int . \Delta A^{n-1} . \Delta B^{n-1}}{A\,B}.$$

Diese Regel wird durch folgendes Beispiel erläutert werden, wo a = 20, b = 85 und nach Süſsmilchs Tabelle A = 491 und B = 17 ist.

Hienach hat man also z. B. die Wahrscheinlichkeit, dafs A gestorben sey nach B, für das 10te Jahr $= \frac{556 - 41}{491 \cdot 17} = \frac{515}{8347} = \varepsilon$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs zu der nämlichen Zeit B gestorben sey nach A, wird also $= 1 - \frac{A^{\overline{n}}}{A} - \frac{B^{\overline{n}}}{B} + \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{AB} - \varepsilon = 1 - \frac{439}{491} - \frac{1}{17} + \frac{439}{491} \cdot \frac{1}{17} - \frac{515}{8347} = \frac{317}{8347}$. Würde die Wahrscheinlichkeit gesucht, dafs am Ende des 10ten Jahrs A überlebt hätte B, so wäre sie $= \varepsilon + \frac{(B - B^{\overline{n}})\, A^{\overline{n}}}{AB} = \frac{515}{8347} + \frac{16 \cdot 439}{8347} = \frac{7539}{8347} = \eta$. Die Wahrscheinlichkeit, dafs zu derselben Zeit B überlebt hätte A, wäre $= 1 - \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{AB} - \eta = 1 - \frac{439}{8347} - \frac{7539}{8347} = \frac{369}{8347}$.

§. 137.

Wenn die Jahre, welche jede der Personen A nach dem Tode ihrer mitverbundenen Person B noch lebt, zusammengenommen und die Summe durch die anfängliche Anzahl der Personen A dividirt wird, so erhält man einen Durchschnitt des Ueberlebens, der die *mittlere Dauer des Ueberlebens,*

oder kürzer das mittlere Ueberleben, von A nach B genannt wird. Da nun die Anzahl der Paare, von denen A lebt, wenn B todt ist, im ersten Jahre $= A^1 (B - B^1)$, im zweiten Jahre $= A^2 (B - B^2)$ etc., im letzten Lebensjahre von A aber, wenn x dessen Altersergänzung bezeichnet, $= A^{\overline{x}} (B - B^{\overline{x}})$ ist, so hat man die mittlere Dauer des Ueberlebens

$$\text{von } A = \frac{A^1(B-B^1)+A^2(B-B^2)+\ldots+A^{\overline{x}}(B-B^{\overline{x}})}{AB}$$

$$= \frac{(A^1 + A^2 + \ldots + A^{\overline{x}})\,B}{A\,B} -$$

$$\frac{A^1 B^1 + A^2 B^2 + \ldots + A^{\overline{x}} B^{\overline{x}}}{A\,B} = E\,a -$$

$E\,\overline{ab}$, d. h. das mittlere Ueberleben von A über B ist gleich der mittleren Lebensdauer von A, weniger der mittleren Verbindungsdauer von A und B.

Eben so ist, wenn y die Altersergänzung von B bezeichnet, die mittlere Dauer des Ueberlebens von B über A =

$$\frac{B^1 (A - A^1) + B^2 (A - A^2) + \ldots + B^{\overline{y}} (A - A^{\overline{y}})}{A\,B}$$

$= E\,b - E\,\overline{ab}$. $B^{\overline{y}}$, $B^{\overline{y+1}}$ etc. und die durch deren Multiplication entstandenen Producte sind gleich o. Wenn aber $x > y$, so ist $A^{\overline{y}} (B - B^{\overline{y}}) = A^{\overline{y}}\,B$, $A^{\overline{y+1}} (B - B^{\overline{y+1}}) = A^{\overline{y+1}}\,B$ etc.

Wären beide Personen von gleichem Alter, so hätte man das mittlere Ueberleben einer jeden über die andre $= Ea - E\overline{aa}$.

Ex. 1. Es sey $a = 15$, $b = 20$, so ist nach Süſsmilch $Ea = 38{,}56$, $Eb = 35{,}03$ und $E\overline{ab} = 26{,}12$. Folglich wird das mittlere Ueberleben von $A = 38{,}56 - 26{,}12 = 12{,}44$, und das mittlere Ueberleben von $B = 35{,}03 - 26{,}12 = 8{,}91$.

Ex. 2. Sind beide Personen 15 Jahr alt, so ist wieder nach Süſsmilch $E\overline{15 . 15} = 27{,}68$. Folglich wird das mittlere Ueberleben einer jeden Person $= 38{,}56 - 27{,}68 = 10{,}88$.

Anm. Da das mittlere Ueberleben unmittelbar durch Subtraction der Verbindungsdauer gefunden wird, so bedarf es zu Berechnung deſselben keiner weiteren Anleitung.

§. 138.

Nach dem vorhergehenden §. erhält man jedoch das Ueberleben nur auf volle Jahre. Will man es auch für $\frac{1}{n}$ Theile des Jahrs haben, so ist daſselbe, wenn A überleben soll, für das erste Jahr $=$ $\frac{1}{nAB}\Big[(A^1 + \frac{n-1}{n}\Delta A)(B - B^1 - \frac{n-1}{n}\Delta B) + (A^1 + \frac{n-2}{n}\Delta A)(B - B^1 - \frac{n-2}{n}\Delta B) + \ldots + (A^1 + \frac{1}{n}\Delta A)(B - B^1 - \frac{1}{n}\Delta B) + A^1(B - B^1)\Big] = \frac{1}{nAB}\Big[(A^1 +$

$\frac{n-1}{n}\Delta A) B + (A^1 + \frac{n-2}{n}\Delta A) B + \ldots + A^1 B] - \frac{1}{n A B}[(A^1 + \frac{n-1}{n}\Delta A)(B^1 + \frac{n-1}{n}\Delta B) + (A^1 + \frac{n-2}{n}\Delta A)(B^1 + \frac{n-2}{n}\Delta B) + \ldots + A^1 B^1] = \frac{A^1 + \frac{n-1}{2n}\Delta A}{A}$

$- \frac{A^1 B^1 + \frac{n-1}{2n}\Delta (A B) - \frac{n^2-1}{6n^2}\Delta A . \Delta B}{A B}$ (S. §. 126.). Eben so hat man den Werth für das zweite Jahr $= \frac{A^2 + \frac{n-1}{2n}\Delta A^1}{A}$

$- \frac{A^2 B^2 + \frac{n-1}{n}\Delta(A^1 B^1) - \frac{n^2-1}{6n^2}\Delta A^1 . \Delta B^1}{A B}$

u. s. w. Für alle Jahre erhält man also den gesuchten Werth $= \frac{\int A'^1 + \frac{n-1}{2n}\int \Delta A'^0}{A}$

$- \frac{\int A'^1 B'^1 + \frac{n-1}{2n}\int \Delta(A^0 B^0) - \frac{n^2-1}{n^2}\int \overline{\Delta A^0 . \Delta B^0}}{A B}$,

wovon, wenn $n = \infty$ gesetzt wird, der erste Theil $= E a + \frac{1}{2}$, der zweite aber $E \overline{ab} + \frac{1}{2} - \frac{\int \Delta A^0 . \Delta B^0}{6 A B}$ ist. (S. den angegebenen §.) Also wird das vollständige Ueberleben von A

$= E\,a - E\,\overline{a\,b} + \frac{\int \overline{\Delta A^2 \Delta B^2}}{6\,AB}$, wo man nach dem Vorhergehenden den letzten Theil entweder genau berechnen, oder ohne beträchtlichen Fehler $= \frac{1}{6\alpha}$ setzen oder auch den Umständen nach ganz weglaſsen kann.

Eben so hat man das vollständige Ueberleben von B über A $= E\,a - E\,\overline{a\,b} + \frac{\int \overline{\Delta A'^2 \Delta B'^2}}{6\,AB}$.

§. 139.

Wendet man diese Sätze auf die *Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens* an, so erhält man nach derselben, wenn α und β die Altersergänzungen der beiden verbundenen Personen bezeichnen, und $\alpha > \beta$ ist, auf ganze Jahre gerechnet das Ueberleben von A $= E\,a - E\,\overline{a\,b} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{1}{6\alpha}$ (§. 61 und 128), $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{1}{6\alpha}$, das Ueberleben von B aber $= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{1}{6\alpha} = \frac{\beta^2}{6\alpha} - \frac{1}{6\alpha}$.

Will man aber die Correction mit berechnen

so wird das Ueberleben von A $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha}$, das Ueberleben von B aber $= \frac{\beta^2}{6\alpha}$.

Wenn $\alpha = \beta$ ist, so wird das Ueberleben einer jeden Person über die andre $= \frac{\alpha^2}{6\alpha} = \frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3}$, welches nach der Hypothese $= \text{E a} - \overline{\text{E a a}}$, wenn dafür die vollständigen Werthe gesetzt werden.

Anm. 1. Das vollständige Ueberleben der beiden Personen fände man auch durch die Integralrechnung auf folgende Weise. Wenn x die verflossene Zeit bezeichnet, so ist das vollständige Ueberleben von B $= \frac{\int(\beta - x)\, x\, dx}{\alpha\beta}$, und von A $= \frac{\int(\alpha - x)\, x\, dx}{\alpha\beta}$; das erstere wird $= \frac{\int x\, dx}{\alpha} - \frac{\int x^2\, dx}{\alpha\beta} = \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x^3}{3\alpha\beta}$, das letztere aber $= \frac{x^2}{2\beta} - \frac{x^3}{3\alpha\beta}$. Ist nun β die kleinste Altersergänzung und setzt man $x = \beta$, so hat man das Ueberleben von B für die Zeit $\beta = \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\beta^2}{3\alpha} = \frac{\beta^2}{6\alpha}$, das Ueberleben von A für die nämliche Zeit aber $= \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{3\alpha}$. Der erstere Werth ist vollständig, da bey Ablauf der Zeit β alle Personen B abgestorben sind. Dagegen lebt bey Ablauf der Zeit β noch ein Theil der Personen A, al-

le von B getrennt, und es kömmt daher zu dem angegebenen zweiten Werthe noch hinzu die Lebensdauer der bey Ablauf der Zeit β noch lebenden Personen A, über alle anfänglich vorhandene A vertheilt. Da nun bey Ablauf der Zeit β sowohl die Anzahl als die Altersergänzung der dann noch lebenden Personen A $= \alpha - \beta$, so ist das hinzuzulegende Stück $=$ $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha}$, folglich hat man das gesammte Ueberleben von A $= \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{3\alpha} + \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha}$, wie oben.

Sind beide Personen von gleichem Alter und ist α die Altersergänzung, so ist das Ueberleben einer jeden Person $=$ $\frac{\int(\alpha - x)\, x\, dx}{\alpha^2} = \frac{\int x\, dx}{\alpha} - \frac{\int x^2\, dx}{\alpha^2} = \frac{x^2}{2\alpha} - \frac{x^3}{3\alpha^2}$, also wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, $= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$.

Anm. 2. Wenn man zu der mittleren Verbindungsdauer von A und B, dem mittleren Ueberleben von A über B und von B über A noch die über alle Paare vertheilte Zeit hinzulegt, während welcher die Paare ganz ausgestorben sind, d. h. die Zeit von dem Augenblick des Abgangs der letzten Person eines jeden Paars an bis zum Ablauf der Altersergänzung x der jüngeren Person, so erhält man wieder die ganze Altersergänzung der jüngern Person. Es ist nämlich diese *mittlere Zeit des Abgestorbenseyns* $= \frac{(A - A^1)\,(B - B^1)}{AB} + \frac{(A - A^2)\,(B - B^2)}{AB} + \ldots = \frac{AB + AB + \ldots}{AB}$

$$-\frac{A\,(B^1 + B^2 + \ldots)}{A\,B} - \frac{B\,(A^1 + A^2 + \ldots)}{A\,B} + \frac{A^1 B^1 + A^2 B^2 + \ldots}{A\,B} = x - Ea - Eb + E\overline{ab}.$$

Nimmt man hiezu die mittlere Verbindungsdauer, imgleichen das mittlere Ueberleben sowohl von A als von B, so hat man die Summe $= x - Ea - Eb + E\overline{ab} + E\overline{ab} + Ea - E\overline{ab} + Eb - E\overline{ab} = x$. Tetens gebraucht diese Zeit des Ausgestorbenseyns, wie er sie nennt, um das längste Leben zu bestimmen. Ich habe sie weder dazu noch zu Auflösung sonstiger Aufgaben nöthig befunden, und daher hier nur gelegentlich die Dauer derselben angegeben.

Uebrigens muſs man sich diese vier Zeiten nicht als auf einander folgend, sondern wenigstens zum Theil als neben einander bestehend, vorstellen. So wie nämlich bey einer einigermaaſsen beträchtlichen Anzahl von Paaren aus A und B das Absterben von A und B anfängt, giebt es lebende Personen A und B, die von der mit ihnen verbunden gewesenen Person getrennt sind. Ferner giebt es von demselben Zeitpunkte an Paare, die ganz ausgestorben sind, so wie auch eine Zeitlang noch ungetrennte Paare übrig bleiben. Die Zahl der letztern nimmt immer mehr ab, so wie die Zahl der ausgestorbenen Paare immer mehr zu. Die Zahl der Personen A und B, welche von einem Paare noch allein übrig sind, nimmt eine Zeit lang zu, nachher aber wieder ab.

§. 140.

Bey der Berechnung der mittleren Lebensdauer werden, wie früher gezeigt worden, die Jahre, welche eine Anzahl Personen von gleichem Alter noch erreicht, zusammengelegt und die Summe durch die Anzahl der Personen dividirt. Bis zu diesem mittlern Alter würden sie alle leben, wenn der Inbe-

griff aller auf das Leben einwirkenden Kräfte, Umstände etc. über Alle gleich vertheilt wäre. Aber eben dieser Verschiedenheit wegen erreichen einige Personen das mittlere Alter, andre sterben vor demselben, noch andre leben über dasselbe hinaus.

Treten zwey Personen von gleichem Alter in eine Verbindung, so kann man zwar für eine jede derselben einzeln genommen nur eine mittlere Lebensdauer annehmen; allein da überhaupt eine Anzahl von Personen nach und nach abgeht, so ist es wahrscheinlich, daſs auch diese zwey zu verschiedenen Zeiten sterben und eine oder die andre von ihnen dem höchsten Lebensziele näher kommen werde als eine allein für sich, und es entsteht also die Frage, wie lange der Wahrscheinlichkeit nach die letzte derselben leben werde. Auch selbst wenn eine jüngere Person mit einer ältern verbunden ist, wird das längste Leben unter den beiden Personen über die mittlere Lebensdauer der jüngern Person hinausgehen, indem einzelne der ältern Personen die mit ihnen verbundene jüngere Person überleben, und also, im Ganzen genommen, die zuletzt sterbende der beiden Personen eines solchen Paars länger lebt als eine derselben einzeln genommen, sey es die ältere oder jüngere, leben würde.

Das längste Leben unter zwey Personen A und B ist nun die Zeit, bis zu deren Ablauf im Durchschnitt irgend eine der beiden Personen lebt, folglich entweder A und B zusammen existiren, oder A allein oder auch B allein lebt. Wenn also das Alter

der beiden Personen mit a und b, ihre Alterserganzungen mit x und y bezeichnet werden, und die anfängliche Anzahl dieser Paare $= A\ B$ ist, so ist die Anzahl der Jahre, welche die Paare zusammengenommen, so lange sie vereint bestehen, durchleben, $= A^1 B^1 + A^2 B^2 + .. + A^y B^y$, die Anzahl der Jahre, welche die einzelnen Individuen aus den Paaren, woraus B verstorben ist, zusammengenommen leben, $= A^1 (B - B^1) + A^2 (B - B^2) + .. + A^x (B - B^x)$, so wie die Anzahl der Jahre, welche die einzelnen Individuen aus den Paaren, wovon A verstorben ist, zusammengenommen leben, $= B^1 (A - A^1) + B^2 (A - A^2) + .. + B^y (A - A^y)$. Wenn man nun diese drey Summen von Jahren, welche die Paare, als Einheiten gerechnet, zusammengenommen, so wie die einzelnen Individuen der getrennten Paare zusammengenommen leben, durch die anfängliche Anzahl der Paare dividirt, so erhält man die mittlere Dauer des längsten Lebens $=$

$$\frac{A^1 B^1 + A^2 B^2 + ..}{AB} + \frac{A^1 (B - B^1) + A^2 (B - B^2) + ..}{A\ B} + \frac{B^1 (A - A^1) + B^2 (A - A^2) + ..}{A\ B} = E\overline{ab}$$

$$+ Ea - E\overline{ab} + Eb - E\overline{ab} = Ea + Eb - E\overline{ab},$$

d. h. die Dauer des längsten Lebens unter A und B ist gleich der Summe der mittleren Le-

bensdauer von A und B, weniger der mittleren Verbindungsdauer beider.

Wenn a = b wäre, so würde die Dauer des längsten Lebens für zwey Personen vom Alter a $= 2\,Ea - E\overline{aa}$.

Da übrigens die Correction sowohl für E a als $Eb = \frac{1}{2}$, für $E\overline{ab}$ aber $= \frac{1}{2} - \frac{\int \Delta A^o \,.\, \Delta B^o}{6\,AB}$ ist, so wird die Correction für das längste Leben, wenn es vollständig gerechnet werden soll, $= \frac{1}{2} + \frac{\int \Delta A^o \,.\, \Delta B^o}{6\,AB}$, wo man wieder den letzten Theil den Umständen nach entweder genau berechnen oder $= \frac{1}{6\alpha}$ setzen oder auch ganz weglaſsen kann.

Ex. Es sey a = 15, b = 55, so wird die Dauer des längsten Lebens nach Süſsmilchs Sterbensordnung = 38,56 + 14,50 — 13,09 = 39,97.

Wäre a = b = 15, so würde die Dauer des längsten Lebens = 2 . 38,56 — 27,68 = 49,44.

Anm. 1. Bey dem gleichmäſsigen Absterben wäre die Dauer des längsten Lebens unter A und B, wenn α und β die dazu gehörigen Altersergänzungen sind, $= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta^2}{6\alpha}$. Wenn $\alpha = \beta$ ist, so wird also das längste Leben $= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{6} = \frac{2\,\alpha}{3}$.

In beiden Ausdrücken ist die Correction schon mitbegriffen.

Anm. 2. Da übrigens das längste Leben aus den Lebensdauern und Verbindungsdauern gefunden wird, so bedarf es keiner weiteren Anleitung zur Berechnung deſselben.

Zweites Kapitel.

Von Verbindungsrenten unter zwey Personen.

§. 141.

Eine *Verbindungsrente* ist eine Rente, welche so lange bezahlt wird, als zwey oder mehrere Personen zusammen leben, folglich mit dem Tode der zuerst sterbenden Person aufhört; sie heiſst daher auch eine *Rente auf das kürzeste Leben.* Hier wird fürs Erste nur von den Verbindungsrenten für zwey Personen gehandelt werden, und es wird hauptsächlich darauf ankommen, den baaren Werth der Verbindungsrente, die jährlich mit 1 Rth. bezahlt wird, zu finden.

§. 142.

Wenn man zuerst annnimmt, daſs die Verbindungsrente *am Ende jedes Jahrs an die dann noch*

bestehenden Paare mit 1 Rth. bezahlt werde, dass die verbundenen Personen anfänglich vom Alter a und b und die ursprüngliche Zahl der Paare = A B sey, so ist am Ende des ersten Jahrs zu zahlen $A^1 B^1$, am Ende des zweiten Jahrs $A^2 B^2$, am Ende des dritten $A^3 B^3$ etc. und am Ende des βten Jahrs $A^{\beta} B^{\beta}$, womit die Reihe abbricht, wenn nämlich β die Altersergänzung der ältern Person, hier B, ist. Discontirt man aber alle diese Zahlungen auf den Anfang des ersten Jahrs und dividirt die Summe der discontirten Zahlungen mit der anfänglichen Anzahl der Paare, so erhält man den baaren Werth der Rente für jedes Paar =

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{A^1 B^1}{r} + \frac{A^2 B^2}{r^2} + \frac{A^3 B^3}{r^3} + \ldots\right)$$

oder kürzer $\frac{1}{AB}\int\frac{A'^1 B'^1}{r^1}$, wo die Reihe so lange fortzusetzen ist, bis der Index von A und B so wie der Exponent von r = β werden. Diese Verbindungsrente, nämlich die für zwey Personen vom Alter a und b jedesmal am Ende des Jahrs, in so fern sie dann noch zusammen leben, bezahlt wird, soll mit $\lambda\overline{ab}$ bezeichnet werden, so das also $\lambda\overline{ab}$ = $\frac{1}{AB}\int\frac{A'^1 B'^1}{r^1}$ ist. Wenn man keine andre Hülfstabelle hat oder einrichten will als die discontirte Mortalitätstabelle, (wo nämlich die Zahl der Lebenden für jedes Altersjahr n mit r^n dividirt ist), so kann man nach dieser Formel die Verbingsren-

ten berechnen. Ist nämlich unter den gegebenen Personen A und B die ältere B, so multiplicirt man A^1 in $\frac{B^1}{rb+1}$, A^2 in $\frac{B^2}{rb+2}$ etc. bis A^{β} in $\frac{B^{\beta}}{rb+\beta}$, welche Ausdrücke für B aus der Tabelle genommen werden, addirt alle diese Producte, und dividirt dann die Summe mit $A \cdot \frac{B}{rb}$, wodurch man $\int \cdot \frac{A'^1\, B'^1}{r^1\, AB} = \lambda\, \overline{ab}$ erhält.

§. 143.

Es ist ferner $AB \cdot \lambda\, \overline{ab} = \frac{A^1\, B^1}{r} + \frac{A^2\, B^2}{r^2} + \frac{A^3 B^3}{r^3} + \ldots$, folglich $(r - 1)\, AB \cdot \lambda\, \overline{ab} =$

$$\frac{A^1\, B^1}{r^0} + \frac{A^2\, B^2}{r} + \frac{A^3\, B^3}{r^2} + \ldots - \frac{A^1\, B^1}{r} - \frac{A^2\, B^2}{r^2} - \ldots$$

$$= \frac{AB - \Delta\,(AB)}{r^0} + \left\{ \frac{A^1 B^1 - \Delta\,(A^1 B^1)}{r} - \frac{A^1\, B^1}{r} \right\} + \left\{ \frac{A^2\, B^2 - \Delta\,(A^2\, B^2)}{r^2} - \frac{A^2\, B^2}{r^2} \right\} + \ldots - \ldots = AB - \int \frac{\Delta\,(A^0\, B^0)}{r^0},$$

und $\lambda\overline{ab} = \frac{1}{(r-1)AB}\left(AB - \int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0}\right)$

$= p\left(1 - \int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0 AB}\right)$, wo $\int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0 AB}$

$= \frac{\Delta(AB)}{AB} + \frac{\Delta(A^1 B^1)}{ABr} + \frac{\Delta(A^2 B^2)}{ABr^2}$

$+ \ldots$, welche Reihe bis zur Altersergänzung der ältern Person fortgeht.

Nun ist ferner $\Delta(AB) = AB - A^1 B^1 = (A^1 + \Delta A)(B^1 + \Delta B) - A^1 B^1 = \Delta A . B^1 + \Delta B . A^1 + \Delta A . \Delta B$ (oder auch $= \Delta A . B + \Delta B . A - \Delta A . \Delta B$); eben so ist $\Delta(A^1 B^1) = A^1 B^1 - A^2 B^2 = \Delta A^1 . B^2 + \Delta B^1 . A^2 + \Delta A^1 . \Delta B^1$ (oder auch $= \Delta A^1 . B^1 + \Delta B^1 . A^1 - \Delta A^1 . \Delta B^1$) etc. Man erhält daher auch $\int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0}$

$= \int \frac{\Delta A'^0 . B'^1}{r^0} + \int \frac{\Delta B^0 . A'^1}{r^0} +$

$\int \frac{\Delta A^0 . \Delta B^0}{r^0}$, wonach man $\int \frac{\Delta(A^0 . B^0)}{r^0}$ aus diesen drey Theilen zusammensetzen kann. Da jedoch $A^1 + \Delta A = A$, $A^2 + \Delta A^1 = A^1$ etc., so kann man auch die beiden letzten Theile in einen einzigen, nämlich in $\int \frac{\Delta B'^0 . A'^0}{r^0}$ zusammenfaſsen, wonach folglich $\int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0} = \int \frac{\Delta A'^0 B'^1}{r^0}$

$+ \int \frac{\Delta B'^0 . A'^0}{r^0}$ wird. Uebrigens erhellet es von selbst, daſs man bey Berechnung dieser Theile

wieder die discontirten Zahlen der Lebenden gebrauchen könne, wobey jedoch zu beobachten ist, daſs, da man hiernach die Summen $\int \frac{\Delta A'^{0} . B'^{1}}{r^{1}}$ und $\int \frac{\Delta B'^{0} . A'^{1}}{r^{1}}$ erhält, man diese Ausdrücke noch mit r multipliciren müſse, um $\int \frac{\Delta A'^{0} B'^{1}}{r^{0}}$ und $\int \frac{\Delta B'^{0} A'^{1}}{r^{0}}$ zu erhalten.

Weil ferner $\Delta A^{1} = \Delta A - \Delta^{2} A$, $\Delta A^{2} = \Delta A - \Delta^{2} A - \Delta^{2} A^{1}$ etc. (§. 52) imgleichen $\Delta B^{1} = \Delta B - \Delta^{2} B$, $\Delta B^{2} = \Delta B - \Delta^{2} B^{1} - \Delta^{2} B^{2}$ etc., so kann man hienach auch die Differenzen der Decremente in $\int \frac{\Delta A'^{0} B'^{1}}{r^{0}}$ und $\int \frac{\Delta B'^{0} A'^{1}}{r^{0}}$ setzen, wobey man jedoch die zweiten Summen der discontirten Zahlen der Lebenden gebrauchen würde.

Anm. Diese hier angeführten Formeln sind den in den §. §. 64 und 67 angegebenen Ausdrücken zur Berechnung der Leibrenten auf ein einziges Leben analog. Sie erfordern indeſsen die Decremente der Verbindungen, die entweder durch die Subtraction der Zahlen der ungetrennten Verbindungen berechnet oder auch aus Theilen zusammengesetzt werden sollen. Die Berechnung wird daher weitläufiger als nach dem folgenden §.

§. 144.

Noch ist $\lambda \overline{ab}$ oder $\frac{1}{AB} \left(\frac{A^{1} B^{1}}{r} + \right.$

$\frac{A^2 B^2}{r^2} + \frac{A^3 B^3}{r^3} + \ldots) = \frac{1}{AB} (\frac{(A - \Delta A) B^1}{r}$
$+ \frac{(A - \Delta A - \Delta A^1) B^2}{r^2} +$
$\frac{(A - \Delta A - \Delta A^1 - \Delta A^2) B^3}{r^3} + \ldots) =$
$\frac{A}{AB} (\frac{B^1}{r} + \frac{B^2}{r^2} + \frac{B^3}{r^3} + \ldots) - \frac{\Delta A}{AB} (\frac{B^1}{r} +$
$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^3}{r^3} + \ldots) - \frac{\Delta A^1}{AB} (\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^3}{r^3}$
$+ \ldots) - \frac{\Delta A^2}{AB} (\frac{B^3}{r^3} + \ldots) = \lambda b -$
$\frac{1}{A} (\frac{\Delta A}{B} \int \frac{B'^1}{r} + \frac{\Delta A^1}{B} \int \frac{B'^2}{r^2} +$
$\frac{\Delta A^2}{B} \int \frac{B'^3}{r^3} + \ldots)$. Und da $\frac{1}{B} \int \frac{B'^1}{r^1} =$
λb, ferner $\frac{1}{B} \int \frac{B'^2}{r^2} = \frac{B^1}{Br} \lambda \overline{b+1}$, eben so
$\frac{1}{B} \int \frac{B'^3}{r^3} = \frac{B^2}{Br^2} \lambda \overline{b+2}$, etc., so hat man
auch $\lambda \overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{A} (\Delta A . \lambda b +$
$\Delta A^1 . \frac{B^1}{Br} \lambda \overline{b+1} + \Delta A^2 . \frac{B^2}{Br^2} \lambda \overline{b+2}$
$+ \ldots)$, wonach die Verbindungsrente für AB aus den Leibrenten für B zusammengesetzt werden kann.

Will man aber, anstatt der Decremente von A, die Differenzen derselben gebrauchen, so hat man

$\lambda ab = \lambda b - \frac{\Delta A}{AB} \int \frac{B'^1}{r^1} -$

$$\frac{\Delta A - \Delta^2 A}{A\,B} \int \frac{B'^2}{r^2} -$$

$$\frac{\Delta A - \Delta^2 A - \Delta^2 A^1}{A\,B} \int \frac{B'^3}{r^3} - \ldots$$

$$= \lambda b - \frac{\Delta A}{A B} \left(\int \frac{B'^1}{r} + \int \frac{B'^2}{r^2} + \int \frac{B'^3}{r^3} \right.$$

$$\left. + \ldots \right) + \frac{\Delta^2 A}{A B} \left(\int \frac{B'^2}{r^2} + \int \frac{B'^3}{r^3} + \ldots \right) +$$

$$\frac{\Delta^2 A^1}{A B} \left(\int \frac{B'^3}{r^3} + \int \frac{B'^4}{r^4} + \ldots \right) +$$

$$\frac{\Delta^2 A^2}{A B} \left(\int \frac{B'^4}{r^4} + \ldots \right) + \ldots = \lambda b - \frac{\Delta A}{A B} \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$$

$$+ \frac{1}{A B} \left(\Delta^2 A . \int^2 \frac{B'^2}{r^2} + \Delta^2 A^1 . \int^2 \frac{B'^3}{r^3} + \right.$$

$$\left. \Delta^2 A^2 . \int^2 \frac{B'^4}{r^4} + \ldots \right).$$

§. 145.

Vermittelst der im vorhergehenden §. angeführten Formeln und einer besonders einzurichtenden Hülfstabelle lassen sich die Verbindungsrenten auf eine ähnliche Weise wie die Verbindungsdauer (nach §. 124) finden. In der ersten Columne dieser Hülfstabelle schreibt man die Jahre des Alters von 0 an bis zum höchsten Lebensziel unter einander. In der 2ten Columne werden die auf das Jahr 0 discontirten Zahlen der Lebenden jedes Alters aufgeführt, so dass bey dem Alter a die Zahl $\frac{A}{ra}$, bey

$\overline{a + 1}$ die Zahl $\frac{A^1}{r^{a+1}}$ etc. steht. Die dritte Columne enthält die Summen dieser discontirten Zahlen der Lebenden von unten an berechnet, so daſs die Summe für n Glieder von unten bey dem nten Gliede von unten angeführt ist. Auſserdem hat man wieder einen beweglichen zu der Tabelle passenden Streifen, worauf die Decremente der Zahlen der Lebenden nach der Reihe unter einander stehen.

Bey dem Gebrauche legt man den Streifen so an die Columne der Summen, daſs das Jahr a des erstern neben das Jahr b + 1 der letztern zu liegen kömmt. Dann multiplicirt man jedes Decrement, vom Jahre a an bis zur kleinsten Altersergänzung, in die nebenstehende Summe der discontirten Zahlen der Lebenden, addirt darauf alle diese Producte, und dividirt die Summe derselben erstlich mit der discontirten Zahl der Lebenden vom Alter b, und zweitens mit der ungeänderten Zahl der Lebenden vom Jahre a, worauf man endlich diesen Quotienten von der Leibrente für das Alter b abzieht. Es ist nämlich nach der Einrichtung der Tabelle die Summe in der 3ten Columne bey dem Alter $b + 1 = \frac{B^1}{r^{b+1}} + \frac{B^2}{r^{b+2}} + .. = \int \frac{B'^1}{r^{b+1}} = \frac{1}{r^b} \int \frac{B'^1}{r^1}$; eben so ist die Zahl bey dem Alter $b + 2 = \frac{1}{r^b} \int \frac{B'^2}{r^2}$ etc. etc.

Folglich erhält man durch Multiplication dieser Summen mit den dazu gehörigen Decrementen die Producte $\Delta A \frac{1}{rb} \int \frac{B'^1}{r^1} + \Delta A^1 \frac{1}{rb} \int \frac{B'^2}{r^2} + ..$ etc, und es ist

$$\frac{\Delta A \cdot \frac{1}{rb} \int \frac{B'^1}{r^1} + \Delta A^1 \cdot \frac{1}{rb} \int \frac{B'^2}{r^2} + ..}{A \cdot \frac{B}{rb}}$$

$$= \frac{\Delta A}{AB} \int \frac{B'^1}{r^1} + \frac{\Delta A^1}{AB} \int \frac{B'^2}{r^2} + \ldots,$$ als dem nach dem vorhergehenden §. von λb abzuziehenden Theile des dort angegebenen Ausdrucks.

Will man, anstatt der Decremente der Zahlen der Lebenden, die Differenzen dieser Decremente gebrauchen, so muſs der vorhin beschriebenen Tabelle noch eine vierte Columne hinzugefügt werden, welche die zweiten Summen der discontirten Zahlen der Lebenden, eben so angeordnet wie in Ansehung der ersten Summen vorher bemerkt worden, enthält. Auf den beweglichen Streifen trägt man anstatt der Decremente ihre Differenzen, mit dem zugehörigen Zeichen + oder ÷, auf.

Bey dem Gebrauche legt man den Streifen an die vierte Columne der Tabelle so, daſs die Differenz des Jahrs o neben der 2ten Summe des Jahrs b + 2 zu stehen kömmt. Demnächst multiplicirt man jede Differenz in die daneben stehende zweite Summe der discontirten Zahlen der Lebenden, addirt alle diese Producte (wobey begreiflich die negativen

Producte abgezogen werden), dividirt dann die Summe der Producte zuerst mit der discontirten Zahl der Lebenden bey dem Jahre b, und dann den Quotienten noch mit A, durch welche Operation man aus den vorhin angeführten Gründen das Product $\frac{1}{\frac{AB}{rb}} \left(\Delta^2 A . \frac{1}{rb} \int^2 \frac{B'^1}{r^2} + \right.$

$\left. \Delta^2 A^1 . \frac{1}{rb} \int^2 \frac{B'^1}{r^3} + . .) + . . \right) =$

$\frac{1}{AB} \left(\Delta^2 A . \int^2 \frac{B'^1}{r^2} + \Delta^2 A^1 . \int^2 \frac{B'^1}{r^3} + . . \right)$

erhält. Dieses Product addirt man sodann zu λb — $\frac{\Delta A}{AB} \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$, wonach die Summe die gesuchte Verbindungsrente giebt.

Anm. Zur Vergleichung dieser Berechnung mit der im §. 143 erwähnten füge ich nur noch hinzu, dafs, wenn die Decremente gebraucht werden, bey ersterer der verneinte Theil aus β Producten bestehe, die in eine Summe zusammengelegt werden müfsen, wo β die kleinste Altersergänzung ist. Nach der Formel des §. 143 besteht der verneinte Theil aus 2 β Producten. Wenn nun gleich der eine Factor in den Producten des letztern Ausdrucks kleiner ist als in den des erstern, so ist doch im Ganzen die hier angegebene Operation kürzer.

§. 146.

Soll die Verbindungsrente aber nicht allein an diejenigen Paare, die am Ende jedes Jahrs noch leben, sondern auch für diejenigen, welche im Lau-

fe des Jahrs durch den Tod einer oder beider Interessenten ausgehen, bezahlt werden, so kann man zunächst wieder im Allgemeinen untersuchen, was zu zahlen seyn würde, wenn jedes Paar für das Jahr, worin es getrennt wird, einen vollen Rententhaler, und zwar am Ende des Jahrs, erhielte. Die Zahl der abgehenden Paare ist nun im ersten Jahre $= \Delta(AB)$, im zweiten $= \Delta(A^1 B^1)$, im dritten $= \Delta(A^2 B^2)$ etc., und eben so viel Rententhaler sind in jedem Jahre zu erlegen. Discontirt man die Zahlung jedes Jahrs auf den Anfangstermin und dividirt die Summe dieser discontirten Zahlungen mit der anfänglichen Anzahl der Paare, so erhält man den Werth des an die in jedem Jahre abgehenden Paare zu zahlenden Thalers für jedes Paar $=$

$$\frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\Delta(AB)}{r} + \frac{\Delta(A^1 B^1)}{r^2} + \frac{\Delta(A^2 B^2)}{r^3} + \ldots\right) = \frac{1}{ABr} \int \frac{\Delta(A'^0 B'^0)}{r^0}.$$

Diese Gröſse, nämlich der Werth eines Thalers, der für jedes Paar aus AB am Ende des Jahrs, worin es nach den Tabellen durch den Tod getrennt wird, zu zahlen ist, soll künftig der Kürze wegen mit $\vartheta\,\overline{ab}$ bezeichnet werden.

Uebrigens findet man den Ausdruck $\vartheta\,\overline{ab}$ aus der Verbindungsrente $\lambda\,\overline{ab}$. Es ist nämlich (§. 143.) $\lambda\,\overline{ab} = p - \frac{p}{AB} \int \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0}$ $= p - pr\vartheta\,\overline{ab}$, folglich wird $pr\vartheta\,\overline{ab} = p -$

$\lambda\,\overline{ab}$, und $\vartheta\,\overline{ab} = \frac{p - \lambda\,\overline{ab}}{pr} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{ab}}{pr}$.

Auch hat man aus §. 144 $\lambda\,\overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{AB}\left(\Delta A \int \frac{B'^1}{r} + \Delta A^1 \int \frac{B'^2}{r^2} + \ldots\right)$, folglich, (da $\lambda b = p - pr\vartheta b$) $p - pr\vartheta\,\overline{ab} = p - pr\,\vartheta b - \frac{1}{AB}\left(\Delta A \int \frac{B'^1}{r} + \Delta A^1 \int \frac{B'^2}{r^2} + \ldots\right)$, und $pr\vartheta\,\overline{ab} = pr\vartheta b + \frac{1}{AB}\left(\Delta A \int \frac{B'^1}{r} + \Delta A^1 \int \frac{B'^2}{r^2} + \ldots\right)$ oder $\vartheta\,\overline{ab} = \vartheta b + \frac{1}{pr\,AB}\left(\Delta A \int \frac{B'^1}{r} + \Delta A^1 \int \frac{B'^2}{r^2} + \ldots\right)$.

Anm. Es erklärt sich übrigens leicht, warum $\vartheta\,\overline{ab} > \vartheta b$ ist. Zwar soll nach $\vartheta\,\overline{ab}$ dieselbe Anzahl von Sterbethalern bezahlt werden als nach ϑb, indem eben so viele Verbindungen nach und nach aufhören als Personen vom Alter b sind. Aber die Verbindungen hören zum Theil schon auf, wenn die andre Person A stirbt, und ein Theil der Sterbethaler ist also nach $\vartheta\,\overline{ab}$ früher fällig als nach ϑb.

§. 147.

Nimmt man nun an, daſs die in jedem Jahre ausgehenden Verbindungen in der Mitte deſselben

alle auf einmal aufhören, und für jede am Ende des Jahrs ein halber Thaler zu zahlen sey, so ist das zu der Verbindungsrente $\lambda\,\overline{ab}$ noch hinzuzulegende Stück $= \frac{1}{2}\,\theta\,\overline{ab}$, und da nach dem vorhergehenden §. $\theta\,\overline{ab} = \frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{ab}}{pr}$, so wird hiernach der vollständige Werth der Verbindungsrente $= \lambda\,\overline{ab} + \frac{1}{2r} - \frac{\lambda\,\overline{ab}}{2pr} = (1 - \frac{1}{2pr})\,\lambda\,\overline{ab} + \frac{1}{2r}$.

Für den Zinsfuſs von 4 Procent wird dies $= \frac{51}{52}\,\lambda\,\overline{ab} + \frac{1}{2{,}08} = 0{,}98077\,\lambda\,\overline{ab} + 0{,}48077$. Für $r = 1{,}05$ hat man den gedachten Werth $= \frac{41}{42}\,\lambda\,\overline{ab} - \frac{1}{2{,}10} = 0{,}97619\,\lambda\,\overline{ab} + 0{,}47619$.

§. 148.

Es ist jedoch bereits oben §. 126. angeführt, daſs, wenn die einzelnen Personen in gleichen Zwischenzeiten während des Jahrs absterben, die in jedem Jahre aufhörenden Verbindungen nicht im Durchschnitt bis zur Mitte fortwähren können, sondern daſs bey jener Voraussetzung die Zeit, welche die im ersten Jahre aufhörenden Verbindungen während desselben fortbestehen, über alle Paare vertheilt, $= \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,(AB)}{AB} - \frac{1}{6}\,\frac{\Delta A\,.\,\Delta B}{AB}$, während des zweiten Jahrs $= \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\,(A^1\,B^1)}{AB}$ —

$\frac{1}{6} \frac{\Delta A^1 . \Delta B^1}{A . B}$ etc. sey. Folglich ist zu dem Werthe der Verbindungsrente 1 eines jeden Paars hinzuzulegen, für das erste Jahr $\frac{1}{2} \frac{\Delta (A B)}{A B r} - \frac{1}{6} \frac{\Delta A . \Delta B}{A B r}$, für das zweite Jahr $\frac{1}{2} \frac{\Delta (A^1 B^1)}{A B r^2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta A^1 . \Delta B^1}{A B r^2}$ etc. Dies beträgt für alle Jahre zusammengenommen $\frac{1}{2} \vartheta \overline{ab} - \frac{1}{6 A B r} \int \frac{\Delta A^0 . \Delta B^0}{r^0}$.

Hier kann man nun wieder diesen letzten Theil, nämlich $\frac{1}{6 A B r} \int \frac{\Delta A^0 \Delta B^0}{r^0}$, je nachdem es die Beschaffenheit fordert, entweder nach seinem genauen Werthe berechnen oder nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens $= \frac{1}{6\alpha\beta} \int \frac{1}{r\beta}$ setzen, wo er, da für $r > 1$ jederzeit $\int \frac{1}{r\beta} < \beta$ ist, immer $< \frac{1}{6\alpha}$ bleibt, oder auch ganz weglassen, in welchem Falle dann die vollständige Verbindungsrente, so wie sie im vorhergehenden §. angenommen, $= \lambda \overline{ab} + \frac{1}{2} \vartheta \overline{ab} = (1 - \frac{1}{2 p r}) \lambda \overline{ab} + \frac{1}{2 r}$ wird.

Sonst ist auch noch der Werth der Verbin-

dungsrente, wenn sie für alle Paare nach Verhältniſs der Zeit, die sie bestehen, jedoch am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, für das erste Jahr =

$$\frac{1}{A\,B\,r} \int (A - x\,\Delta A)\,(B - x\,\Delta B)\,dx =$$

$$\frac{1}{A\,B\,r}\Big[A\,B \int dx - (A\,\Delta B + B\,\Delta A) \int x\,dx$$

$$+ \Delta A\,.\,\Delta B \int x^2\,dx\Big] = \frac{A^{\underline{0}}\,B^{\underline{0}}}{A\,B\,r} - \frac{1}{2}\,\frac{A^{\underline{0}}\,\Delta B^{\underline{0}}}{A\,B\,r}$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{B^{\underline{0}}\,\Delta A^{\underline{0}}}{A\,B\,r} + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta A^{\underline{0}}\,\Delta B^{\underline{0}}}{A\,B\,r} = \frac{A^{\underline{0}}\,B^{\underline{0}}}{3\,A\,B\,r}$$

$$- \frac{1}{6}\,\Big(\frac{A^{\underline{0}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r} + \frac{B^{\underline{0}}\,A^{\underline{1}}}{A\,B\,r}\Big) + \frac{1}{3}\,\frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r}.$$

Eben so ist der Werth für das zweite Jahr =

$$\frac{1}{3}\,\frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r^2} + \frac{1}{6}\,\Big(\frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{2}}}{A\,B\,r^2} + \frac{A^{\underline{2}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r^2}\Big) +$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{A^{\underline{2}}\,B^{\underline{2}}}{A\,B\,r^2}$$ etc. Daraus erhält man den Werth

$$\text{für alle Jahre} = \frac{1}{3}\,\frac{A^{\overline{-1}}\,B^{\overline{-1}}}{A\,B}\,\lambda\,\overline{(a - 1)\,(b - 1)}$$

$$+ \frac{1}{6}\,\Big[\frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a - 1)\,b} + \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b - 1)}\Big] +$$

$$\frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{a\,b}.$$

§. 149.

Sollte die Verbindungsrente nicht auf einmal, sondern in Terminen bezahlt werden, so kömmt es darauf an, wie viel während jedes Termins zu zahlen ist. Dies ergiebt sich für jedes nte Jahr aus

der Formel $\int(A^{\underline{n}} + (1 - x)\, \Delta A^{\underline{n-1}})\, (B^{\underline{n}} + (1 - x)\, \Delta B^{\underline{n-1}})\, dx = A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} . x + (A^{\underline{n}} \Delta B^{\underline{n-1}} + B^{\underline{n}} \Delta A^{\underline{n-1}})\, (x - \frac{x^2}{2}) + \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}} (x - x^2 + \frac{x^3}{3})$, wenn man x jedesmal dem abgelaufenen Theile des Jahrs gleich setzt und den Werth jedes Theils von dem des folgenden abzieht.

Soll nun zuerst die Rente halbjährlich bezahlt werden, so erhält man die für das erste Semester jedes Jahrs zu zahlende Rentensumme, wenn man in der obigen Formel $x = \frac{1}{2}$ setzt, $= \frac{1}{2} A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} + \frac{3}{8}(A^{\underline{n}} \Delta A^{\underline{n-1}} + B^{\underline{n}} \Delta A^{\underline{n-1}}) + \frac{7}{24} \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}} = \frac{1}{2} A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} + \frac{3}{8} (A^{\underline{n}} \Delta B^{\underline{n-1}} + B^{\underline{n}} \Delta A^{\underline{n-1}} + \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}}) + (\frac{7}{24} - \frac{3}{8}) \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}} = \frac{1}{2} A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} + \frac{3}{8} \Delta (A^{\underline{n-1}} B^{\underline{n-1}}) - \frac{1}{12} \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}}$. Für das ganze Jahr hat man, wenn man in der obigen Formel $x = 1$ setzt, die Rentensumme ohne Zinsen $= A^{\underline{n}} B^{\underline{n}} + \frac{1}{2}(A^{\underline{n}} \Delta B^{\underline{n-1}} + B^{\underline{n}} \Delta A^{\underline{n-1}}) + \frac{1}{3} \Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}}$, wonach also, wenn man hievon die für das erste Semester gefundene Summe abzieht, die im zweiten Semester zu zahlende Rentensumme $= \frac{1}{2} A^{\underline{n}} B^{\underline{n}}$

$+ \frac{1}{8} (A^{\frac{n}{}} \Delta B^{\frac{n-1}{}} + B^{\frac{n}{}} \Delta A^{\frac{n-1}{}}) +$
$\frac{1}{24} \Delta A^{\frac{n-1}{}} \Delta B^{\frac{n-1}{}} = \frac{1}{2} A^{\frac{n}{}} B^{\frac{n}{}} + \frac{1}{8} \Delta (A^{\frac{n-1}{}} B^{\frac{n-1}{}}) -$
$\frac{1}{12} \Delta A^{\frac{n-1}{}} . \Delta B^{\frac{n-1}{}}$ wird. Hiernach erhält man den Werth der Zahlungen des nten Jahrs, auf den Anfangstermin discontirt und über alle Paare vertheilt,

$$= \frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{2\,r^n} \frac{A^{\frac{n}{}} B^{\frac{n}{}}}{A B} + \frac{3\,r^{\frac{1}{2}}+1}{8\,r^n} \frac{\Delta (A^{\frac{n-1}{}} B^{\frac{n-1}{}})}{A B}$$

$$- \frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{12\,r^n} \frac{\Delta A^{\frac{n-1}{}} . \Delta B^{\frac{n-1}{}}}{A B}.$$ Nimmt man den discontirten Werth aller Jahre zusammen, so hat man die in halbjährlichen Terminen zahlbare

$$\text{Verbindungsrente} = \frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{2} \lambda\, \overline{ab} +$$

$$\frac{3\,r^{\frac{1}{2}}+1}{8} \vartheta\, \overline{ab} - \frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{12\,r} \int \frac{\Delta A^{o} . \Delta B^{o}}{r^{o}\, A B}$$

oder auch, wenn $\frac{1}{r} - \frac{\lambda\, \overline{ab}}{pr}$ anstatt $\vartheta\, \overline{ab}$ gesetzt wird, $= \frac{r^{\frac{3}{2}} + 3\,r + 3\,r^{\frac{1}{2}} + 1}{8\,r} \lambda\, \overline{ab} +$

$$\frac{3\,r^{\frac{1}{2}}+1}{8\,r} - \frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{12\,r} \int \frac{\Delta A^{o} . \Delta B^{o}}{r^{o}\, A B}.$$ Für $r =$ 1,04 wird dieser Ausdruck $= 0{,}990386\ \lambda\, \overline{ab} +$ $0{,}487909 - 0{,}160256 \int \frac{\Delta A^{o} . \Delta B}{r^{o}\, A B}$.

Soll die Rente vierteljährlich bezahlt werden,

so kann man in der vorhin angeführten Formel anstatt x nach und nach setzen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und 1; man erhält dann die Rentensumme für das 1ste Quartal des nten Jahrs $= \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{7}{32} (A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}} + B^{\overline{n}} \Delta A^{\overline{n-1}}) + \frac{37}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}} = \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{7}{32} \Delta (A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}) - \frac{5}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}}$,

für das zweite Quartal $= \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{5}{32} (A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}} + B^{\overline{n}} \Delta A^{\overline{n-1}}) + \frac{19}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}} = \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{5}{32} \Delta (A^{\overline{n-1}} B^{\overline{n-1}}) - \frac{11}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} \Delta B^{\overline{n-1}}$,

für das dritte Quartal $= \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{3}{32} (A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}} + B^{\overline{n}} \Delta A^{\overline{n-1}}) + \frac{7}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}} = \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{3}{32} \Delta (A^{\overline{n-1}} B^{\overline{n-1}}) - \frac{11}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}}$

und für das letzte Quartal $= \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{1}{32} (A^{\overline{n}} \Delta B^{\overline{n-1}} + B^{\overline{n}} \Delta A^{\overline{n-1}}) + \frac{1}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}} = \frac{1}{4} A^{\overline{n}} B^{\overline{n}} + \frac{1}{32} \Delta (A^{\overline{n-1}} B^{\overline{n-1}}) - \frac{5}{192} \Delta A^{\overline{n-1}} . \Delta B^{\overline{n-1}}$. Dies giebt, auf die nämliche Weise wie vorher angeführt worden, den Werth für alle Jahre =

$$\frac{r^{\frac{3}{4}} + r^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{4}} + 1}{4} \lambda \overline{ab} + \frac{7 r^{\frac{3}{4}} + 5 r^{\frac{1}{2}} + 3 r^{\frac{1}{4}} + 1}{32} \theta \overline{ab} -$$

$$\frac{37\, r^{\frac{3}{4}} + 19\, r^{\frac{1}{2}} + 7\, r^{\frac{1}{4}} + 1}{192\, r} \int \frac{\Delta A^{o} . \Delta B^{o}}{r^{o}\, AB},$$

wo man wieder $\frac{1}{r} - \frac{\lambda\, \overline{ab}}{pr}$ anstatt $\vartheta\, \overline{ab}$ setzen kann. Wenn $r = 1{,}04$ ist, so erhält man hiernach den Werth der vierteljährlich zahlbaren Verbindungsrente $= 0{,}995241\ \lambda\, \overline{ab} + 0{,}490911 - 0{,}162638 \int \frac{\Delta A^{o} . \Delta B^{o}}{r^{o}\, AB}$.

§. 150.

Sollte die Verbindungsrente *in augenblicklichen Terminen* bezahlt werden, so hat man den über alle Interefsenten vertheilten baaren Werth des ersten Jahrs $= \int \frac{(A - x \Delta A)(B - x \Delta B)\, dx}{AB\, r^{x}}$

$$= \frac{AB}{AB} \int \frac{dx}{r^{x}} - \frac{A.\Delta B + B.\Delta A}{AB} . \int \frac{x\, dx}{r^{x}}$$

$+ \frac{\Delta A . \Delta B}{AB} \int \frac{x^{2}\, dx}{r^{x}}$. Da nun nach der Integration $x = 1$ gesetzt werden mufs, so findet man nach §. 42. $\frac{AB}{AB} \int \frac{dx}{r^{x}} =$

$\pi \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{AB}{AB} = \frac{\pi}{pr} \cdot \frac{AB}{AB}$. Ferner ist $\frac{A . \Delta B + B . \Delta A}{AB} . \int \frac{x\, dx}{r^{x}}$

$$= \left(\pi^2 - \frac{\pi + \pi^2}{r}\right) \cdot \frac{A \,.\, \Delta B + B \,.\, \Delta A}{A\,B}$$

$$= \frac{\pi^2 (r - 1) - \pi}{r} \cdot \frac{A \,.\, \Delta B + B \,.\, \Delta A}{A\,B}$$

$$= \frac{\pi^2 - p\pi}{p\,r} \cdot \frac{A \,.\, \Delta B + B \,.\, \Delta A}{A\,B}$$

$$= \frac{\pi}{p\,r} (\pi - p) \frac{A \,.\, \Delta B + B \,.\, \Delta A}{A\,B}.$$ Endlich ist

$$\frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B} \int \frac{x^2\, d\,x}{r^x} =$$

$$\left(2\,\pi^3 - \frac{\pi + 2\,\pi^2 + 2\,\pi^3}{r}\right) \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B}$$

$$= \frac{2\,\pi^3 (r - 1) - 2\,\pi^2 - \pi}{r} \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B}$$

$$= \frac{2\,\pi^3 - 2\,\pi^2 p - \pi p}{p\,r} \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B} =$$

$$\frac{\pi}{p\,r} (2\,\pi^2 - 2\,\pi p - p) \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B}.$$ Der gesammte Werth der Zahlung des ersten Jahrs ist also

$$= \frac{\pi}{p\,r} \left[\frac{A\,B}{A\,B} - (\pi - p) \frac{A \,.\, \Delta B + B \,.\, \Delta A}{A\,B} \right.$$

$$\left. + (2\,\pi^2 - 2\,\pi\,p - p) \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B} \right] =$$

$$\frac{\pi}{p\,r} \left(\frac{A\,B}{A\,B} - (\pi - p) \int \frac{A \,.\, B\Delta + B \,.\, \Delta A - \Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B} \right.$$

$$\left. - \pi\,(2p + 1 - 2\pi) \frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{A\,B} \right) = \frac{\pi}{p\,r} \left(\frac{AB}{AB} \right.$$

$$\left. - (\pi - p) \frac{\Delta\,(A\,B)}{A\,B} - \pi\,(2p + 1 - 2\,\pi) \right.$$

$\left.\frac{\Delta A \,.\, \Delta B}{AB}\right]$. Auf die nämliche Art erhält man den discontirten Werth für das zweite Jahr $=$

$$\frac{\pi}{pr}\left(\frac{A^1\ B^1}{A\ B\ r} - (\pi - p)\frac{\Delta\ (A^1\ B^1)}{A\ B\ r} - \pi\ (2p + 1 - 2\pi)\frac{\Delta\ A^1\ \Delta\ B^1}{A\ B\ r}\right),$$

so wie fürs dritte Jahr $=$

$$\frac{\pi}{pr}\left(\frac{A^2\ B^2}{A\ B\ r^2} - (\pi - p)\frac{\Delta\ (A^2 B^2)}{A\ B\ r^2} - \pi\ (2p + 1 - 2\pi)\frac{\Delta\ A^2\ \Delta\ B^2}{A\ B\ r^2}\right).$$

etc. etc.

Dies giebt also für alle Jahre zusammen den Werth

$$= \frac{\pi}{pr}\left(\frac{A\ B}{A\ B} + \frac{A^1\ B^1}{A\ B\ r} + \frac{A^2 B^2}{A B r^2} + \ldots - (\pi - p)\ \left[\frac{\Delta\ (A\ B)}{A\ B} + \frac{\Delta (A^1\ B^1)}{A\ B\ r} + \frac{\Delta\ (A^2\ B^2)}{A\ B\ r^2} + \ldots\right] - \pi\ (2\ p + 1 - 2\ \pi) \left(\frac{\Delta A\ .\ \Delta B}{A\ B} + \frac{\Delta\ A^1\ .\ \Delta\ B^1}{A\ B\ r} + \frac{\Delta\ A^2\ .\ \Delta\ B^2}{A\ B\ r^2} + \ldots\right)\right) = \frac{\pi}{pr}\left[1 + \lambda\ \overline{a\ b} - (\pi - p)\ r\,\vartheta\ \overline{ab} - \pi\ (2\,p + 1 - 2\pi) \int \frac{\Delta A^0\ .\ \Delta B^0}{ABr^0}\right]$$

oder, [wenn man anstatt $r\,\vartheta\ \overline{a\,b}$ setzt $1 - \frac{\lambda\ \overline{ab}}{p}$]

$$= \frac{\pi}{pr}\left(1 + \lambda \overline{a\ b} - \pi + p + \frac{\pi - p}{p}\ \lambda\ \overline{a\ b} - \pi\ (2\ p + 1 - 2\ \pi) \int \frac{\Delta\ A^0\ .\ \Delta\ B^0}{A\ B\ r^0}\right) =$$

$$\frac{\pi}{pr}\left(\frac{\pi}{p}\lambda\overline{ab} + pr - \pi - \pi(2p + 1 - 2\pi)\right.$$
$$\left.\int\frac{\Delta A^{o}.\Delta B^{o}}{ABr^{o}}\right) \text{(Vergl. §. 70).}$$

Für $r = 1{,}04$ ist $\pi = 25{,}4967317$, $\frac{\pi}{p} = 1{,}0198693$, $\frac{\pi}{pr} = 0{,}9806435$ und $\pi(2p + 1 - 2\pi) = 0{,}166662$. Folglich erhält man nach diesem Zinsfuſse den vollständigen Werth $= 0{,}9806435\,(1{,}0198693\;\lambda\overline{ab} + 0{,}5032683 - \frac{0{,}166662}{AB}\int\frac{\Delta A^{o}.\Delta B^{o}}{r^{o}}) = 1{,}0001281.\;\lambda\overline{ab} + 0{,}493526 - \frac{0{,}163433}{AB}\int\frac{\Delta A^{o}.\Delta B^{o}}{r^{o}}$, wo man in den meisten Fällen den vollständigen Werth $= \lambda\overline{ab} + \frac{1}{2}$ wird setzen können.

§. 151.

Die Verbindungsrente *nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens,* auf ganze Jahre gerechnet, ergiebt sich aus der allgemeinen Formel $\lambda\overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{AB}\left(\Delta A\int\frac{B^{1}}{r} + \Delta A^{1}\int\frac{B^{2}}{r^{2}} + \ldots\right)$. Nach der Hypothese ist nämlich, wenn α und β die Altersergänzungen für A und B sind und $\alpha\beta$ die anfängliche Anzahl der Paare, $\lambda\overline{ab} = \lambda b$

$-\frac{1}{\alpha\beta}\left(\int\frac{\overline{\beta-1}}{r}+\int\frac{\overline{\beta-2}}{r^2}+\int\frac{\overline{\beta-3}}{r^3}+\right.$ $\left...\right)$. Nun ist $\frac{1}{\beta}\left(\int\frac{\overline{\beta-1}}{r}+\int\frac{\overline{\beta-2}}{r^2}+\int\frac{\overline{\beta-3}}{r^3}+..\right)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\overline{\beta-1}}{r}+\frac{2.\overline{\beta-2}}{r^2}+\frac{3.\overline{\beta-3}}{r^3}+..\right)=Lb$, d. h. gleich einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrente für B, und es wird daher hiernach $\lambda\,\overline{ab}=\lambda b-\frac{1}{\alpha}Lb$, wo b das höhere Alter ist.

Da überdem nach §. 85 $Lb=p(1+r)\lambda b-p\int\frac{1}{r^{\beta-1}}$ ist, so wird auch $\lambda\,\overline{ab}=\lambda b-\frac{1}{\alpha}p\lambda b-\frac{1}{\alpha}pr\lambda b+\frac{1}{\alpha}p\int\frac{1}{r^{\beta-1}}=\left(1-\frac{2p+1}{\alpha}\right)\lambda b+\frac{p}{\alpha}\int\frac{1}{r^{\beta-1}}$, wo dann λb ebenfalls nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens genommen werden mufs.

Ex. Es sey $a=40$, $b=55$, so ist nach der Süfsmilchschen Tabelle $\alpha=45{,}28$ und $\beta=29$. Man erhält also nach dem 4 Procentfufse $\lambda.\overline{40.55}=\left(1-\frac{51}{45{,}28}\right)9{,}7783+\frac{25}{45{,}28}16{,}66306=-1{,}2346+9{,}2=7{,}9654$.

Sollten auch diejenigen Paare, die im Laufe jedes Jahrs aufgelöset werden, für die Zeit, da sie bestanden haben, die Rente am Ende des Jahrs erhalten, so müsste zu dem obigen Werth noch hinzugelegt werden $\frac{1}{2}\,\vartheta\,\overline{ab} - \frac{1}{6\,\alpha\beta}\int\frac{1}{r^\beta}$, und die vollständige Verbindungsrente wäre hiernach $\lambda\,\overline{ab} + \frac{1}{2}\,\vartheta\,\overline{ab} - \frac{1}{6\,\alpha\beta}\int\frac{1}{r^\beta} = (1 - \frac{1}{2pr})\,\lambda\,\overline{ab} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{6\,\alpha\,\beta}\int\frac{1}{r^\beta}$ (wie im §. 148), wo dann $\lambda\,\overline{ab}$, so wie es eben bestimmt worden, genommen werden muss.

§. 152.

Wenn die Verbindungsrenten nach der gedachten Hypothese *in augenblicklichen Terminen* bezahlt werden sollen, und α, β die Altersergänzungen, $\alpha\beta$ die anfängliche Anzahl der Paare und x die verflossene Zeit bezeichnet, so ist der gegenwärtige Werth der Verbindungsrente $= \int\frac{(\alpha - x)(\beta - x)\,dx}{\alpha\beta\;r^x}$ $= \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$. Nun ist $\int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x} = \lambda\,b$ nach der Hypothese, (§. 75) und $\int\frac{x\,dx}{r^x} =$

$\frac{1}{\beta}\int\frac{x^2 dx}{rx} = Lb$ nach der Hypothese (§. 87),

folglich wird $\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{xdx}{rx} -$

$\frac{1}{\alpha}\int\frac{xdx}{rx} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2 dx}{rx} = \lambda b - \frac{1}{\alpha}Lb$,

beide Renten nach der Hypothese genommen,

oder auch $= \lambda b - \frac{2\pi}{\alpha}\lambda b + \frac{\pi^2}{p\alpha}\int\frac{1}{r^\beta}$

(§. 87) $= (1 - \frac{2\pi}{\alpha})\lambda b + \frac{\pi^2}{p\alpha}\int\frac{1}{r^\beta}$.

Für a = 40 und b = 55 wird, die Altersergänzungen nach Süſsmilchs Sterbensordnung genommen und die Zinsen zu 4 Procent berechnet, die vollständige Verbindungsrente $= (1 - \frac{50,9934}{45,48})$

$10,2681 + \frac{650,0833}{25.45,28} \cdot 16,9837 = - 0,12617 \cdot$

$10,2681 + 0,57428 \cdot 16,9837 = - 1,2956 +$

$9,7534 = 8,4578$.

Im vorigen §. war diese Rente ohne die Correction = 7,9654, der Unterschied ist also = 0,4924

§. 153.

Will man mit einer Näherung zufrieden seyn, so kann man den Werth der Verbindungsrente entweder

1) nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens bestimmen, wobey man dann die Altersergänzungen gleich der doppelten mittlern Lebensdauer

er nach derjenigen Sterblichkeitstafel, die man zum Grunde legt, annimmt. Sucht man also z. B. nach dieser Methode die Verbindungsrente für die Leben 40 .. 55, so ist nach Süſsmilchs Mortalitätstabelle $E\,40 = 22{,}64$, also $\alpha = 45{,}28$, $E\,55 = 14{,}50$, also $\beta = 29$, und man erhält, wie bereits im vorigen §. angeführt ist, zu 4 Procent gerechnet, den Werth der Verbindungsrente $= 7{,}9654$. Der genaue Werth nach Süſsmilchs Tabelle ist $= 7{,}9396$.

2) Man kann auch die Leibrentenwerthe für ein einziges Leben nach der zum Grunde zu legenden Sterblichkeitstabelle nehmen und daraus mit Hülfe der Hypothese gleicher Decremente die Verbindungsrenten auf eine ähnliche Art, wie es §. 129 in Ansehung der Verbindungsdauer angegeben ist, berechnen. Es ist nämlich nach §. 146 $\lambda\,\overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{AB}\left(\Delta A \int \frac{B'^1}{r^1} + \Delta A^2 \int \frac{B'^2}{r^2} + \Delta A^3 \int \frac{B'^3}{r^3} + \ldots\right)$. Wenn nun die Decremente für A unter sich gleich angenommen werden und anstatt A die Anfangszahl $= \alpha$, folglich jedes Decrement $= 1$, gesetzt wird, so erhält man $\lambda\,\overline{ab} = \lambda b - \frac{1}{\alpha B}\left(\int \frac{B'^1}{r^1} + \int \frac{B'^2}{r^2} + \int \frac{B'^3}{r^3} + \ldots\right) = \lambda b - \frac{1}{\alpha B} \cdot \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$. Um nun den Werth $\frac{1}{\alpha B} \int^2 \frac{B'^1}{r}$, zu finden, nehme

man aus der vorher im §. 145 erwähnten Hülfstabelle, und zwar aus der vierten Columne, die bey dem Jahre b + 1 stehende Zahl, welche nach der Einrichtung der Tabelle $= \frac{1}{rb} . \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$. Diese Zahl dividire man durch das Product von α in die discontirte Zahl der Lebenden bey dem Jahre b oder durch $\frac{\alpha . B}{rb}$, wodurch man erhält

$\frac{\frac{1}{rb} \int^2 \frac{B'^1}{r^1}}{\alpha . B : rb} = \frac{1}{\alpha . B} \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$. Endlich ziehe man diesen Quotienten von λ b nach der zum Grunde gelegten Tabelle ab.

Ex. für $\lambda \overline{40 . 55}$ erhält man nach Süſsmilchs Tabelle und dem 4 Procentfuſs λ b = 9,6394, $\frac{B}{rb} = 29,49$, $\int^2 \frac{B'^1}{rb+1} = 2428,66$, also $\lambda \overline{ab}$ $= 96394 - \frac{2428,66}{45,28 . 29,49} = 9,6394 - 1,8188 =$ 7,8206.

3) Man kann auch annehmen, daſs die Verbindungsrente beinahe gleich sey einer Leibrente für ein einziges Leben, deſsen mittlere Dauer der gegebenen mittleren Verbindungsdauer gleich ist. Sind also zwey Alter gegeben, so sucht man die mittlere Verbindungsdauer derselben so wie das Alter, deſsen mittlere Lebensdauer dieser Verbindungsdauer gleich ist, und nimmt sonach die Leibrente für dieses Alter als Verbindungsrente für die beiden Personen an.

Ex. Nach Süſsmilchs Sterbensordnung ist die mittlere Verbindungsdauer für das Alter von 40 und 55 Jahren = 11,38, dies ist aber die mittlere Lebensdauer für eine einzige Person von 61,42 Jahren, und die Leibrente für dieses Aster ist = 7,9449, welche daher als Verbindungsrente für zwey Personen von 40 und 55 Jahren angenommen werden kann.

Wie diese Näherungswerthe nach Süſsmilchs Sterbensordnung und zu 4 Procent ohngefähr ausfallen, zeigt folgende Vergleichung:

Verbindungs-Renten

Alter der verbund. Personen	Wahrer Werth	nach Näherung 1.	nach Näherung 2.	nach Näherung 3.
15 . 15	14,630	13,446	14,024	14,817
15 . 35	12,365	11,697	11,849	12,745
15 . 55	8,881	8,712	8,572	8,905
20 . 20	13,678	12,765	13,205	13,892
20 . 40	11,398	10,907	11,005	11,496
20 . 60	7,652	7,640	7,440	7,648
25 . 25	12,813	12,074	12,436	13,010
25 . 45	10,342	10,033	10,029	10,418
25 . 65	6,468	6,557	6,311	6,468
30 . 30	11,851	11,322	11,578	12,016
30 . 50	9,218	9,099	8,997	9,293
30 . 70	5,467	5,615	5,372	5,489
35 . 35	10,858	10,528	10,686	10,982
35 . 55	8,166	8,168	8,024	8,189
35 . 75	4,610	4,755	4,549	4,619
40 . 40	9,948	9,720	9,828	10,019
40 . 60	7,056	7,157	6,947	7,048
40 . 80	3,849	3,955	3,792	3,862
45 . 45	8,836	8,812	8,817	8,884
45 . 65	5,898	6,125	5,857	5,909
45 . 85	3,054	3,110	3,031	3,081
50 . 50	7,687	7,865	7,763	7,702
50 . 70	4,925	5,222	4,949	4,946
50 . 90	2,128	2,131	2,137	2,128
55 . 55	6,690	6,951	6,800	6,658
55 . 75	4,126	4,403	4,163	4,155
50 . 90	2,101	2,105	2,112	2,102
60 . 60	5,558	5,962	5,725	5,535
65 . 75	3,881	4,238	3,983	3,909
60 . 90	2,055	2,069	2,041	2,059
70 . 70	3,610	4,185	3,833	3,646
70 . 80	2,868	3,314	3,084	2,836
70 . 90	1,872	1,967	1,979	1,885
80 . 80	2,368	2,833	2,547	2,417
80 . 90	1,665	1,814	1,831	1,681
90 . 90	1,419	1,419	1,451	1,432

Anm. Man sieht hieraus, daſs die Näherungswerthe für die mittlern Jahre freilich einigermaaſsen brauchbar sind, in den frühern und spätern Jahren aber beträchtlich von dem wahren Werthe abweichen. Für die Jahre unter 10 werden die Unterschiede der ersten und zweiten Methode noch bedeutender, indem hier die Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens sich am meisten von der Sterblichkeit der Tabellen entfernt. Die Werthe der zweiten Näherungsmethode sind nach Tetens Tabelle der zweiten Summen der discontirten Zahlen der Lebenden berechnet, welche Tabelle jedoch nur Hunderttheile, und auch diese nicht einmal genau, enthält. Bey mehrerer Schärfe der Rechnung würden diese Werthe vielleicht den wahren Werthen etwas näher kommen.

Mehr über diese Näherungsmethoden ſindet sich noch weiter unten im Kapitel von höhern Verbindungsrenten.

§. 154.

Aus der Verbindungsrente für zwey Personen vom Alter a und b oder $\lambda\,\overline{a\,b}$ würde man die Verbindungsrente für zwey um ein Jahr ältere Personen oder $\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)}$ folgendermaaſsen finden. Es ist, wie oben angeführt worden, $\lambda\,\overline{a\,b} =$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{A^1\,B^1}{r} + \frac{A^2\,B^2}{r^2} + \frac{A^3\,B^3}{r^3} + \ldots\right);$$

auch ist $\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} = \frac{1}{A^1\,B^1}\Big(\frac{A^2\,B^2}{r}$

$$+ \frac{A^3\,B^3}{r^2} + \frac{A^4\,B^4}{r^3} + \ldots\Big),\ \text{folglich}$$

$$\frac{A^1\,B^1}{A\,B\,r}\,\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} = \frac{1}{AB}\left(\frac{A^2\,B^2}{r^2} + \right.$$

$\frac{A^{\underline{3}}\,B^{\underline{3}}}{r^3} + \frac{A^{\underline{4}}\,B^{\underline{4}}}{r^4} + \ldots)$, und $\frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r}$ +

$\frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r}\,\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} = \frac{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}{A\,B\,r}$ +

$\frac{1}{A\,B}\,(\frac{A^{\underline{2}}\,B^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}\,B^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots) = \lambda\,\overline{a\,b}$, daher $\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} = \frac{A\;B}{A^{\underline{1}}\,B^{\underline{1}}}\,r\,\lambda\,\overline{a\,b} - 1$

(Vergl. §. 76).

Setzt man $a + 1 = c$ und $b + 1 = d$, wo also $A^{\underline{1}} = C$, $B^{\underline{1}} = D$, $A = C^{-\underline{1}}$ und $B = D^{-\underline{1}}$ gesetzt werden muſs, so findet man hienach aus der Verbindungsrente für zwey Personen vom Alter a und b die Verbindungsrente für zwey Personen, die um ein Jahr jünger sind, nämlich $\lambda\,\overline{(c-1)\,(d-1)}$

$$= \frac{C\,D}{C^{-\underline{1}}\,D^{-\underline{1}}.\,r}\,.\,\lambda\,\overline{c\,d} + \frac{C\,D}{C^{-\underline{1}}\,D^{-\underline{1}}.\,r} = \frac{C\;D}{C^{-\underline{1}}\,D^{-\underline{1}}.\,r}\,(\lambda\,\overline{c\,d} + 1).$$

§. 155.

Auf die nämliche Weise kann man aus der Verbindungsrente für die Leben a und b die Verbindungsrente für $a + n$ und $b + n$ oder $\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)}$ finden. Es ist nämlich

$$\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)} = \frac{1}{A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}}}\,(\frac{A^{\underline{n+1}}\,B^{\underline{n+1}}}{r}$$

$+ \frac{A^{\overline{n+2}} B^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots)$. Wenn man nun die ersten n Glieder von $\lambda \overline{a b}$, nämlich von $\frac{A^{\overline{1}} B^{\overline{1}}}{A B r}$ an bis $\frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}}{A B r^{n}}$, zusammen mit Q bezeichnet, so ist $\lambda \overline{a b} = Q + \frac{A^{\overline{n+1}} B^{\overline{n+1}}}{A B r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}} B^{\overline{n+2}}}{A B r^{n+2}} + \ldots = Q + \frac{1}{A B r^{n}} \cdot (\frac{A^{\overline{n+1}} B^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\overline{n+2}} B^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots) = Q + \frac{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}}{A B r^{n}} \times \lambda \overline{(a+n)(b+n)}$, folglich wird $\lambda \overline{(a+n)(b+n)} = \frac{A B r^{n}}{A^{\overline{n}} B^{\overline{n}}} (\lambda \overline{a b} - Q)$.

§. 156.

Sollte eine Verbindungsrente für die Leben a und b um n Jahre *aufgeschoben* werden, so fielen in dem Ausdruck $\frac{1}{AB} (\frac{A^{\overline{1}} B^{\overline{1}}}{r} + \frac{A^{\overline{2}} B^{\overline{2}}}{r^2} + \ldots)$ die ersten n Glieder weg, und die um n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente, die mit $\lambda \overline{a b}^{\,\prime n+1}$ bezeichnet werden kann, wäre $= \frac{1}{AB} (\frac{A^{\overline{n+1}} B^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}}$

$$+\frac{A^{n+2}B^{n+2}}{r^{n+2}}+\ldots)=\frac{1}{ABr^{n}}\left(\frac{A^{n+1}B^{n+1}}{r}\right.$$

$$\left.+\frac{A^{n+2}B^{n+2}}{r^{2}}+\ldots\right).$$ Nun ist

$$\frac{1}{A^{n}B^{n}}\left(\frac{A^{n+1}B^{n+1}}{r}+\frac{A^{n+2}B^{n+2}}{r^{2}}\right.$$

$$\left.+\ldots\right)=\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)},$$ und

$$\frac{1}{A\,B\,r^{n}}\cdot\left(\frac{A^{n+1}B^{n+1}}{r}+\frac{A^{n+2}B^{n+2}}{r^{2}}\right.$$

$$\left.+\ldots\right)=\frac{A^{n}B^{n}}{A\,B\,r^{n}}\cdot\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)},$$

folglich $\overline{\lambda\,a\,b}^{\,n+1}=\dfrac{A^{n}B^{n}}{A\;B\,.\,r^{n}}\,\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)}$.

Ex. Es sey $a=25$, $b=30$, die Verbindungsrente soll um 10 Jahre aufgeschoben werden, also $n=10$ seyn. Dann ist nach der Süſsmilchschen Tabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent $A=466$, $B=439$, $A^{10}=409$, $B^{10}=374$, $\frac{1}{r^{10}}=0{,}675564$ nnd $\lambda\,\overline{35\,.\,40}=10{,}3722$, folglich

$$\overline{\lambda\,25\,.\,30}^{\,11}=\frac{409\,.\,374}{466\,.\,439}\,.\,0{,}675564\,.\,10{,}3722$$

$$=5{,}2394.$$

Anm. Die Verbindungsrente für zwey Leben $\overline{a+n}$ und $\overline{b+n}$ ist $=\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)}$. Wollten nun die Personen

vom Alter a und b die für eine um n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente zu erlegende Summe, sofort bezahlen, und wäre es gewiſs, daſs sie beide nach n Jahren noch lebten, so hätten sie zu entrichten $\frac{1}{r^n} \lambda . \overline{(a + n)\ (b + n)}$. Da aber die Wahrscheinlichkeit, daſs sie nach n Jahren beide noch leben, $= \frac{A^{\overline{n}}\ B^{\overline{n}}}{A\ B}$ ist, so wird der Werth dieser Verbindungsrente nur $= \frac{A^{\overline{n}}\ B^{\overline{n}}}{A\ B\ r^n} \lambda\ \overline{(a + n)\ (b + n)}$, woraus sich gleichfalls der obige Satz ergiebt.

§. 157.

Den Werth einer am Ende des nten Jahrs *aufhörenden* Verbindungsrente für das Alter a u. b erhält man, wenn man von der vollen Verbindungsrente für diese beiden Leben die um n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente abzieht, indem die mit dem nten Jahre aufhörende und die zu derselben Zeit anhebende Verbindungsrente den vollen Werth der Verbindungsrente ausmachen müſsen, oder es ist die nach n Jahren aufhörende Verbindungsrente für die Leben a und b, die auch mit $\overline{\lambda\ a\ b}^{\,n,}$ bezeichnet werden kann, $= \lambda\ a\ b - \overline{\lambda\ a\ b}^{\,n + 1}$.

Ex. Für das Alter von 25 und 30 Jahren erhielte man also den Werth der mit dem Ende des 10ten Jahrs aufhörenden Verbindungsrente, wenn man von der vollen Verbindungsrente für die Le-

ben 25 . 30 den Werth der um 10 Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente für dieselben Leben abzöge, oder es wäre der gesuchte Werth $= 10{,}3722 - 5{,}2394 = 5{,}1328$.

§. 158.

Falls die Verbindungsrente um n Jahre aufgeschoben werden und ausserdem mit dem $\overline{n + m}$ten Jahre aufhören sollte, so wäre der Werth derselben gleich der Differenz der um n Jahre und der um $n + m$ Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente, welches von selbst erhellet.

§. 159.

Eine Verbindungsrente, die im ersten Jahre mit 1 anfängt, und mit jedem Jahre um 1 *nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigt*, welche Rente mit $L\,\overline{ab}$ bezeichnet werden soll, findet man auf folgende Weise.

Es ist $L\,\overline{ab} = \frac{1}{AB}\left(\frac{A^1 B^1}{r} + \frac{2\,A^2 B^2}{r^2} + \frac{3\,A^3 B^3}{r^3} + \ldots\right)$, folglich $(r - 1)\,L\,\overline{ab} =$

$$\frac{1}{AB}\left\{\begin{array}{l} \frac{A^1 B^1}{r^0} + \frac{2\,.\,A^2 B^2}{r} + \frac{3\,.\,A^3 B^3}{r^2} + \ldots \\ \qquad\qquad - \frac{A^1 B^1}{r} - \frac{2\,.\,A^2 B^2}{r^2} - \ldots \end{array}\right\}$$

und da $A^1 B^1 = AB - \Delta(AB)$, $A^2 B^2 = A^1 B^1 - \Delta(A^1 B^1)$ etc. etc., so wird $(r-1) L \overline{ab} =$

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{AB - \Delta(AB)}{r^0} + \frac{2.A^1B^1 - 2.\Delta(A^1B^1)}{r^1} - \frac{A^1 B^1}{r}\right\} =$$

$$= \left\{ + \frac{3.A^2 B^2 - 3.\Delta(A^2 B^2)}{r^2} + \ldots - \frac{2.A^2 B^2}{r^2} - \ldots \right\}$$

oder $(r-1) L \overline{ab} = \frac{AB}{AB} + \frac{1}{AB}\left(\frac{A^1 B^1}{r} + \frac{A^2 B^2}{r^2} + \ldots\right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\Delta(AB)}{r^0} + \frac{2.\Delta(A^1 B^1)}{r} + \frac{3.\Delta(A^2 B^2)}{r^2} + \ldots\right) =$
$1 + \lambda \overline{ab} - \int^2 \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0 AB}$, und $L \overline{ab} = p\left(1 + \lambda \overline{ab} - \int^2 \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0 AB}\right)$.

Bey der Anwendung kömmt es darauf an, den Theil $\int^2 \frac{\Delta A^0 B^0}{r^0}$ zu finden. Nun ist

$$\int^2 \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0} = \frac{\Delta(AB)}{r^0} + \frac{2\Delta(A^1 B^1)}{r} + \frac{3\Delta(A^2 B^2)}{r^2} + \ldots$$

Wenn man anstatt AB setzt $(A^1 + \Delta A)(B^1 + \Delta B)$, ferner anstatt $A^1 B^1$, $(A^2 + \Delta A^1)(B^2$

$+ \Delta B^1$) etc., wie vorher im §. 143, so erhält man

$$\int^2 \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0} = \frac{\Delta B . A^1 + \Delta A . B^1 + \Delta A . \Delta B}{r^0}$$

$$+ \frac{2 . \Delta B^1 . A^2 + 2 . \Delta A^1 . B^2 + 2 . \Delta A^1 . \Delta B^1}{r}$$

$$+ \frac{3 . \Delta B^2 . A^3 + 3 . \Delta A^2 . B^3 + 3 . \Delta A^2 . \Delta B^2}{r^2}$$

$$+ \,.\,. = \int^2 \frac{\Delta B'^0 . A'^1}{r^0} + \int^2 \frac{\Delta A'^0 . B'^1}{r^0}$$

$+ \int^2 \frac{\Delta A'^0 . \Delta B'^0}{r^0}$, aus welchen drey Theilen man $\int^2 \frac{\Delta(A^0 B^0)}{r^0}$ zusammensetzen müſste. Da indeſsen $\Delta A . B^1 + \Delta A . \Delta B = \Delta A . B$, ferner $\Delta A^1 . B^2 + \Delta A^1 . \Delta B^1 = \Delta A^1 . B^1$ etc., so können die beiden letzten Theile wieder wie im §. 143 vorher in einen einzigen zusammengebracht werden, welcher dann $= \int^2 \frac{\Delta A^0 . B^0}{r^0}$ ist. Hienach hat man also $\int^2 \frac{\Delta(A^0 . B^0)}{r^0} = \int^2 \frac{\Delta B'^0 . A'^1}{r^0} + \int^2 \frac{\Delta A^0 . B^0}{r^0}$. Man würde also zufolge dieser Formel die Producte $A^1 . \Delta B$, $\frac{A^2 . \Delta B^1}{r}$, $\frac{A^3 . \Delta B^2}{r^2}$ etc., ferner $B . \Delta A$, $\frac{B^1 . \Delta A^1}{r}$, $\frac{B^2 . \Delta A^2}{r^2}$ etc. bis zur Altersergänzung des ältern Lebens suchen, demnächst diese Producte von unten an summiren und

die Summen von unten noch einmal summiren müssen, um $\int^2 \frac{\Delta (A^0 B^0)}{r^0}$ zu erhalten.

Zwar könnte man anstatt der Decremente wieder die Differenzen derselben setzen, aber die Rechnung würde dann noch einmal so viel Multiplicationen erfordern, wie man unten näher ersehen wird.

§. 160.

Man kann ferner $L\,\overline{ab}$ auf eine ähnliche Weise suchen wie oben §. 144 $\lambda\,\overleftarrow{ab}$ gefunden worden ist. Es ist nämlich, wie schon angeführt, $L\,\overline{ab} =$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{A^1\,B^1}{r} + \frac{2\,A^2\,B^2}{r^2} + \frac{3\,A^3\,B^3}{r^3} + \dots\right) = \frac{1}{AB}\left(\frac{(A - \Delta A)\,B^1}{r} + \frac{2\,(A - \Delta A - \Delta A^1)\,B^2}{r^2} + \frac{3\,(A - \Delta A - \Delta A^1 - \Delta A^2)\,B^3}{r^3} + \dots\right),$$

folglich wird $L\,\overline{ab} = \frac{A}{AB}\left(\frac{B^1}{r} + \frac{2\,B^2}{r^2} + \frac{3\,B^3}{r^3} + \dots\right) - \frac{\Delta A}{AB}\left(\frac{B^1}{r} + \frac{2\,B^2}{r^2} + \frac{3\,B^3}{r^3} + \dots\right) - \frac{\Delta A^1}{AB}\left(\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^3}{r^3} + \frac{B^4}{r^4} + \dots + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2\,B^3}{r^3}\right.$

$$+ \frac{3 B^4}{r^4} + \ldots) - \frac{\Delta A^2}{AB} (\frac{2 B^2}{r^2} + \frac{2 B^4}{r^4} + \frac{2 B^5}{r^5} + \ldots + \frac{B^3}{r^3} + \frac{2 B^4}{r^4} + \frac{3 B^5}{r^5} + \ldots) - \frac{\Delta A^3}{AB} (\frac{3 B^4}{r^4} + \frac{3 B^5}{r^5} + \ldots + \frac{B^4}{r^4} + \frac{2 B^5}{r^5} + \ldots),$$

$- \ldots$, oder es wird $L\overline{ab} = Lb - \frac{1}{AB} [\Delta A \int^2 \frac{B'^1}{r^1}$

$$+ \Delta A^1 (\int^2 \frac{B'^2}{r^2} + \int \frac{B'^2}{r^2}) + \Delta A^2 (\int^2 \frac{B'^3}{r^3} + 2 \int \frac{B'^3}{r^3}) + \ldots + \Delta A^n (\int^2 \frac{B'^{n+1}}{r^{n+1}} + n \int \frac{B'^{n+1}}{r^{n+1}}) + \ldots].$$

Anm. 1. Die vorher angeführte Gleichung $L\overline{ab} = Lb - \frac{\Delta A}{AB} (\frac{B^1}{r} + \frac{2 B^2}{r^2} + \ldots) - \frac{\Delta A^1}{AB} (\frac{2 B^2}{r^2} + \frac{3 B^3}{r^3} + \ldots) - \frac{\Delta A^2}{AB} (\frac{3 B^3}{r^3} + \frac{4 B^4}{r^4} + \ldots) - \ldots$ kann auch noch auf eine andre Weise ausgedruckt werden. Es ist nämlich $\frac{1}{B} (\frac{2 B^2}{r^2} + \frac{3 B^3}{r^3} + \ldots) = \overline{Lb}^{\prime 2}$; d. h. gleich einer um 1 Jahr aufgeschobenen steigenden Leibrente für B, $\frac{1}{B} (\frac{3 B^3}{r^3} + \frac{4 B^4}{r^4} + \ldots) = \overline{Lb}^{\prime 3}$; d. h. gleich der um zwey Jahre aufgeschobenen wachsenden

Leibrente für B etc., folglich wird auch $L\overline{ab} =$

$$Lb - \frac{1}{A}(\Delta A.Lb + \Delta A^1 \overline{Lb}^{'2} + \Delta A^2 \overline{Lb}^{'3} + \ldots).$$

Dabey ist jedoch zu bemerken, daſs überhaupt $L\overline{b}^{'n}$ mit n Renteneinheiten im ersten Hebungsjahre anfängt.

Anm. 2. Die hier angegebenen Berechnungen sind freilich ziemlich weitläufig; indeſsen ist doch keine bequemere Methode anzugeben. Die Berechnung nach dem vorhergehenden §. wäre wenigstens noch umständlicher, indem man dazu die Producte $\frac{\Delta A . B^1}{r^0}$, $\frac{\Delta A^1 . B^2}{r}$ etc. erst besonders berechnen müſste, wovon man sonst keinen Gebrauch würde machen können, sobald eine andre Anfangszahl für A oder B gegeben wäre, wogegen man nach dem gegenwärtigen §. $\int \frac{B^{'n}}{r^n}$ und $\int^2 \frac{B^{'n}}{r^n}$ entweder aus den bereits verfertigten Tabellen nehmen, oder, wenn man sie erst berechnen müſste, doch sonst wieder gebrauchen kann.

§. 161.

Bey der Voraussetzung des *gleichmäſsigen Absterbens* findet man die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Verbindungsrente weit leichter. Es ist nämlich nach dieser Hypothese, wenn α und β die Altersergänzungen der beiden Leben sind, $L\overline{ab} = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{r} + \frac{2(\alpha - 2)(\beta - 2)}{r^2} + \ldots\right)$, wovon das allge-

meine Glied $= \frac{x(\alpha - x)(\beta - x)}{\alpha\beta r^x} =$

$\frac{\alpha\beta x - \alpha x^2 - \beta x^2 + x^3}{\alpha\beta r^x} = \frac{x}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}\right.$

$\left. + \frac{1}{\beta}\right) \frac{x^2}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \frac{x^3}{r^x}$ ist. Folglich ist die Summe bis zu dem Gliede, wo $x = \beta$ wird, $=$ $\int \frac{\beta}{r^\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \int \frac{\beta^2}{r^\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \int \frac{\beta^3}{r^\beta}$, wo man jeden Theil nach §. 40 finden kann.

Auch ist ferner $\frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{r} + \right.$ $\frac{2(\alpha - 2)(\beta - 2)}{r^2} + \frac{3(\alpha - 3)(\beta - 3)}{r^3}$

$\left. + \ldots\right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta - 1}{r} + \frac{2 . \overline{\beta - 2}}{r^2} + \right.$

$\left. \frac{3 . \overline{\beta - 3}}{r^3} + \ldots \right) - \frac{1}{\alpha} . \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta - 1}{r} \right.$

$\left. + \frac{2^2\, \overline{\beta - 2}}{r^2} + \frac{3^2\, \overline{\beta - 3}}{r^3} + \ldots \right).$

Hiervon ist der erste Theil gleich einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Leibrente für das Alter b, der zweite Theil aber ist gleich einer nach den Quadraten der natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung steigenden Rente für das nämliche Alter, dividirt durch α. Wenn man eine nach den Quadraten der natürlichen Zahlen steigende Rente für B mit $L^2 b$ bezeichnet, so ist also $L\,\overline{ab} = Lb - \frac{1}{\alpha} L^2 b$.

§. 162.

Sollte die Verbindungsrente nach der Hypothese *in augenblicklichen Terminen* zahlbar seyn und zugleich in diesen augenblicklichen Terminen nach Verhältniſs der abgelaufenen Zeit steigen, so wäre, wenn α und β die vorige Bedeutung haben und x die abgelaufene Zeit bezeichnet, der baare Werth dieser Rente $= \int \frac{(\alpha - x)(\beta - x)\,dx}{\alpha\beta r^x}$

$$= \int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int \frac{x^2\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int \frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$+ \frac{1}{\alpha\beta}\int \frac{x^3\,dx}{r^x}$, wovon man jeden Theil nach §. 42 findet.

Sonst ist auch $\int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int \frac{x^2\,dx}{r^x}$

$$- \frac{1}{\beta}\int \frac{x^2\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int \frac{x^3\,dx}{r^x} =$$

$$\pi \int \frac{dx}{r^x} - \frac{\pi x}{r^x} - \frac{2\pi}{\alpha}\int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{\pi x^2}{\alpha r^x}$$

$$- \frac{2\pi}{\beta}\int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{\pi x^2}{\beta r^x} + \frac{3\pi}{\alpha\beta}\int \frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$- \frac{\pi x^3}{\alpha\beta r^x}$. Da nach der Integration $x = \beta$ gesetzt werden muſs, so wird $- \frac{\pi x}{r^x} + \frac{\pi x^2}{\beta r^x}$ $= 0$, so wie auch $+ \frac{\pi x^2}{\alpha r^x} - \frac{\pi x^3}{\alpha\beta r^x} = 0$, folglich wird $L\,\overline{ab} = \pi \int \frac{dx}{r^x} - \frac{2\pi}{\alpha}\int \frac{x\,dx}{r^x} -$

$\frac{2\pi}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{3\pi}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx}$. Wenn man auf beiden Seiten addirt $2\pi\int\frac{dx}{rx} - \frac{\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{\pi}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx}$, so erhält man $L\,\overline{ab} = 3\pi\left(\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx}\right) - 2\pi\int\frac{dx}{rx} + \frac{\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{\pi}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} = 3\pi\lambda\overline{ab} - \pi\lambda b - \pi\int\frac{dx}{rx} + \frac{\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx}$, indem $\int\frac{dx}{rx} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx} = \lambda\overline{ab}$ (§. 153.) und $\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} = \lambda b$. [$\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx}$ ist, da x hier $= \beta$ gesetzt werden muſs, die mit dem Ablauf des Jahrs β aufhörende Leibrente für das Alter a]

Wäre $\alpha = \beta$, so würde $\pi\int\frac{dx}{rx} - \frac{\pi}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} = \pi\lambda a = \pi\lambda b$, und dann hätte man $L\,\overline{bb} = 3\pi\lambda\,\overline{bb} - 2\pi\lambda b$.

Da überdem $\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx}$

$= Lb$ (§. 87.) und $\frac{1}{\alpha}\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^3\,dx}{r^x} = \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x^3\,dx}{r^x}\right) = \frac{1}{\alpha} L^2 b$, wo $L^2 b$ wieder die nach den Quadraten der natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung steigende Leibrente für b bezeichnet, so ist auch hier $L\overline{ab} = Lb - \frac{1}{\alpha} L^2 b$, wie im nächstvorhergehenden §.

§. 163.

Wenn eine nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigende Verbindungsrente für die Personen A und B um n Jahre aufgeschoben und dann im $\overline{n+1}$ten Jahre mit 1 anfangen sollte, so wäre der Werth derselben $= \frac{1}{AB}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{2\,A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \frac{3\,A^{\overline{n+3}}\,B^{\overline{n+3}}}{r^{n+3}} + \ldots\right) = \frac{1}{ABr^n}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{2\,A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots\right) = \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{A\,B\,r^n}\,L\overline{(a+n)(b+n)}$.

Wenn aber die aufgeschobene steigende Ver-

bindungsrente im $\overline{n+1}$ten Jahre so bezahlt werden sollte, als wenn sie sofort im ersten Jahre mit 1 angefangen hätte, so wäre ihr Werth =

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\overline{n+1}\,A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r^{n+1}} + \frac{\overline{n+2}\,A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^{n+2}} + \ldots\right) = \frac{n}{ABr^{n}}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^{2}} + \ldots\right) + \frac{1}{ABr^{n}}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{2\,A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^{2}} + \ldots\right) = \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{A\,B\,r^{n}} \times$$

$$[n.\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)} + L\,\overline{(a+n)\,(b+n)}].$$

§. 164.

Soll im Gegentheil die steigende Verbindungsrente mit dem Ablaufe des nten Jahrs aufhören, so muſs man von dem gegenwärtigen vollen Werthe der steigenden Verbindungsrente den Werth der aufgeschobenen steigenden Verbindungsrente, und zwar einer solchen, die im $\overline{n+1}$ten Jahre mit n+1 anfängt, abziehen, oder es ist der gesuchte Werth =

$$L\,\overline{ab} - \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{A\,B\,r^{n}}\,[n.\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)} + L\,\overline{(a+n)\,(b+n)}].$$

Drittes Kapitel.

Von
Ueberlebens-Renten unter zweyen Personen.

---

§. 165.

Eine Leibrente, welche an eine gewisse Person, nachdem eine andre bestimmte Person verstorben ist, bezahlt wird, heisst eine *Ueberlebensrente*. Ist die Rente der Ehefrau auf den Fall dass der Mann stirbt, oder einem Kinde auf den Fall dass der Vater oder beide Eltern sterben, zugesichert, so wird die Ueberlebensrente eine *Wittwen-* oder *Waisenpension* genannt. Die Person, welche die Rente geniesst, heisst der *Pensionist*, diejenige aber, von deren Tode an die Pension bezahlt werden soll, der *Versorger*.

§. 166.

Wenn eine Anzahl von Versorgern vom Alter b und eben so viel eventuellen Pensionisten vom Alter a in eine Gesellschaft zusammentritt, und die anfängliche Zahl der solchergestalt verbundenen Paare = AB gesetzt wird, so ergiebt der §. 118, wie viele Paare in jedem Jahre existiren, wovon A noch lebt, $\underline{B}$ aber verstorben ist, d. h. wie viel Pensionisten vom anfänglichen Alter a in jedem Jahre nach dem Tode ihres Versorgers vom anfänglichen Alter b existiren. Die Zahl derselben ist nämlich am En-

de des ersten Jahrs $= A^{\underline{1}} (B - B^{\underline{1}})$, am Ende des 2ten Jahrs $= A^{\underline{2}} (B - B^{\underline{2}})$, so wie überhaupt am Ende des nten Jahrs $= A^{\underline{n}} (B - B^{\underline{n}})$. Wenn nun jeder Pensionist am Ende jedes Jahrs, so lange er lebt, 1 Rthlr erhalten soll, so ist der gegenwärtige Werth aller dieser Zahlungen $=$

$$\frac{A^{\underline{1}} (B - B^{\underline{1}})}{r} + \frac{A^{\underline{2}} (B - B^{\underline{2}})}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}} (B - B^{\underline{3}})}{r^3} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}} (B - B^{\underline{x}})}{r^x}),$$

wo x die Altersergänzung von A ist, und der Werth der Ueberlebensrente für einen einzelnen Pensionisten ist $= \frac{1}{A\,B} \left(\frac{A^{\underline{1}} (B - B^{\underline{1}})}{r} + \frac{A^{\underline{2}} (B - B^{\underline{2}})}{r^2} + \ldots + \frac{A^{\underline{x}} (B - B^{\underline{x}})}{r^x} \right)$.

Ferner ist

$$\frac{1}{A\,B} \left(\frac{A^{\underline{1}} (B - B^{\underline{1}})}{r^1} + \frac{A^{\underline{2}} (B - B^{\underline{2}})}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}} (B - B^{\underline{3}})}{r^3} + \ldots \right) = \frac{1}{A\,B} \left(\frac{A^{\underline{1}} B}{r} + \frac{A^{\underline{2}} B}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}} B}{r^3} + \ldots \right) -$$

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{A^{\underline{1}} B^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}} B^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}} B^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots \right) = \lambda a - \lambda \overline{a b},$$

d. h. man findet den Werth der Ueberlebensrente, wenn man von der Leibrente für die zu versorgende Person die Verbindungsrente für dieselbe Person und den Versorger abzieht.

Ex. Wenn a = 25, b = 35, so ist nach Süſsmilchs Sterblichkeitstafel und dem 4 Procentfusse $\lambda a = 15{,}9870$ und $\lambda \overline{ab} = 11{,}7272$, folglich wird die Ueberlebensrente für A = 15,9870 — 11,7272 = 4,2598.

Anm. Was im §. angeführt worden, ergiebt sich auch unmittelbar aus der Natur der Sache, indem man sich vorstellen kann, daſs die Person A sofort eine Leibrente 1 bezöge, dafür aber, so lange die Person B mit ihr zusammen lebt, eine eben so groſse Rente bezahlen müſste, wo ihr dann nur der Werth der nach dem Tode von B fälligen Leibrente übrig bliebe.

§. 167.

Wenn die Leibrente jedesmal am Ende des Jahrs, aber nicht bloſs an die dann noch lebenden Intereſsenten, sondern auch für die im Laufe deſselben Jahrs versorbenen, nach Verhältniſs der Zeit, die sie erlebt haben, bezahlt werden soll, so ist der vollständige Werth derselben $= (1 - \frac{1}{2pr}) \lambda a + \frac{1}{2r}$ (§. 68). Setzt man nun den vollständigen Werth der Verbindungsrente, die am Ende des Jahrs bezahlt wird, so wie er im §. 147. angenommen ist, $= (1 - \frac{1}{2pr}) \lambda \overline{ab} + \frac{1}{2r}$, so wird der Werth der *corrigirten Ueberlebensrente* =

$$(1 - \frac{1}{2pr}) \lambda a + \frac{1}{2r} - (1 - \frac{1}{2pr}) \lambda \overline{ab}$$

$-\frac{1}{2r} = (1 - \frac{1}{2pr})(\lambda a - \lambda \overline{ab})$, welches bey dem Zinsfuſse von 4 Procent beinahe um 2 Procent von dem Werth von $\lambda a - \lambda \overline{ab}$, beide ohne Correction genommen, verschieden ist.

Will man aber die genaue Correction von $\lambda\overline{ab}$ nehmen, so wie sie im §. 148 angegeben ist, so muſs man von dem oben angeführten Werthe der Verbindungsrente noch $\frac{1}{6r} \int \frac{\Delta A^2 . \Delta B^2}{r^o\, A B}$ abziehen, und die Ueberlebensrente ist dann $= (1 - \frac{1}{2pr}) \times$

$$(\lambda a - \lambda \overline{ab}) + \frac{1}{6r} \int \frac{\Delta A^2 . \Delta B^2}{r^o\, A B}.$$

Anm. Uebrigens ist es leicht zu erklären, warum die Ueberlebensrente, die Zwischenzinsen ungerechnet, mit der Correction kleiner wird als ohne dieselbe. Nach der Formel des vorhergehenden §. ist nämlich so gerechnet, als ob alle die A, deren B vor ihnen sterben, schon in dem nämlichen Jahre, wo der Todesfall erfolgt, einen vollen Rententhaler erhielten, hier dagegen ist für das Sterbejahr von B die Rente nur nach Verhältniſs der Zeit berechnet. Wenn nun gleich nach der letzten Berechnung wieder die von ihren B getrennten A, welche im Laufe jedes Jahrs sterben, noch einen ihrer Lebenszeit verhältniſsmäſsigen Theil der Rente erhalten, so ist dieses hinzuzulegende Stück doch nicht so groſs als das erstere abzuziehende.

§. 168.

Im vorhergehenden §. ist jedoch angenommen, daſs die Ueberlebensrente am Eude des Jahrs auf einmal bezahlt werde. Soll sie aber im Laufe des

Jahrs *terminweise bezahlt werden*, und zwar für die jedesmal Abgehenden nach Verhältniſs der Zeit, die sie noch erlebt haben, so wird der Werth derselben etwas gröſser ausfallen müſsen.

Wenn die eine Hälfte der Rente in der Mitte, die andre aber am Schluſse des Jahrs zahlbar wäre, so würde der vollständige Werth derselben $=$

$$\frac{r^{\frac{3}{2}}+3r+3r^{\frac{1}{2}}+1}{8r}\lambda a+\frac{3r^{\frac{1}{2}}+1}{8r}$$

$$-\frac{r^{\frac{3}{2}}+3r+3r^{\frac{1}{2}}+1}{8r}\lambda\overline{ab}-\frac{3r^{\frac{1}{2}}+1}{8r}$$

$$+\frac{r^{\frac{1}{2}}+r}{12r}\int\frac{\Delta A^{o}.\Delta B^{o}}{r^{o}AB}.$$ (S. §. §. 72 und 149) $= \dfrac{r^{\frac{3}{2}}+3r+3r^{\frac{1}{2}}+1}{8r}(\lambda a-\lambda\overline{ab})$

$$+\frac{r^{\frac{1}{2}}+1}{12r}\int\frac{\Delta A^{o}.\Delta B^{o}}{r^{o}AB},$$ wo das letzte Stück der Regel nach wegbleiben kann. Für $r = 1{,}04$ wird solchergestalt der Werth $= 0{,}990386$ $(\lambda a - \lambda\overline{ab})$. Bey vierteljährlicher Zahlung würde er $= 0{,}995241\ (\lambda a - \lambda\overline{ab})$.

Sollte aber die Ueberlebensrente in *augenblicklichen Terminen* bezahlt werden, so wäre der vollständige Werth derselben $= \dfrac{\pi}{pr}\left(\dfrac{\pi}{p}\lambda a+pr-\pi\right)$

$$-\frac{\pi}{pr}\left(\frac{\pi}{p}\lambda\overline{ab}+pr-\pi\right)+\frac{\pi^{2}}{pr}(1+2p-2\pi)\times$$

$\int \frac{\Delta A^o . \Delta B^o}{r^o AB}$. (S. §. §. 70 und 150) $=$
$\frac{\pi^2}{p^2 r} (\lambda a - \lambda \overline{ab}) + \frac{\pi^2}{pr} (1 + 2p - 2\pi) \times$
$\int \frac{\Delta A^o . \Delta B^o}{r^o AB}$. Wenn $r = 1{,}04$, folglich $\pi =$ 25,4967 ist, so wird hienach der vollständige Werth der gesuchten Rente $= 1{,}000128 (\lambda a - \lambda \overline{ab}) +$ $0{,}163433 \int \frac{\Delta A^o . \Delta B^o}{r^o AB}$, wofür man in der Praxis wohl unbedenklich $\lambda a - \lambda \overline{ab}$ setzen kann.

§. 169.

Da ganz allgemein die Ueberlebensrente gleich ist der Leibrente für die zu versorgende Person, weniger der Verbindungsrente für dieselbe Person und den Versorger, so gilt dies auch für die Rente *nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens.* Sind nach dieser Hypothese die Leibrenten und Verbindungsrenten nur auf ganze Jahre berechnet, so muſs man die im vorigen §. angegebene Correction sowohl wegen der Renten selbst als wegen der Zinsen sämtlicher Pensionen hinzufügen. Hat man die Leibrenten und Verbindungsrenten, beide in augenblicklichen Terminen zahlbar, berechnet, so ist der Werth der Ueberlebensrente genau der Differenz der beiden Renten gleich.

Ex. Die im augenblicklichen Terminen zahlbare

Leibrente für eine vierzigjährige Person ist, wenn nach Süſsmilch ihre Altersergänzung = 45,28 angenommen wird, nach der Hypothese = 13,5702. Die auf gleiche Weise berechnete Verbindungsrente für zwey Personen von 40 und 55 Jahren ist = 8,4578. Folglich wird hier die Ueberlebensrente für die jüngere Person = 13,5702 − 8,4578 = 5,1124. Auf ganze Jahre ist die Leibrente, ebenfalls nach der Hypothese, = 13,0760 und die Verbindungsrente für die gedachten Personen = 7,9654, folglich wird die Ueberlebensrente hienach = 13,0760 − 7,9654 = 5,1106.

Anm. Unmittelbar erhielte man nach der Hypothese die Ueberlebensrente, in augenblicklichen Terminen zahlbar, für die ältere Person B $= \int \frac{x(\beta - x)\,dx}{\alpha . \beta\, rx} =$

$\frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx}$. Nun ist nach der Hypothese die Leibrente für B $= \int\frac{dx}{rx} -$

$\frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx}$, die Verbindungsrente für A und B aber =

$$\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx},$$

folglich

$$\int\frac{dx}{rx} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} - \int\frac{dx}{rx} + \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} + \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{rx} - \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{rx},$$

d. h. auch hier hat man die Ueberlebensrente für B = $\lambda b - \lambda \overline{ab}$.

Wollte man aber auf ähnliche Weise die Ueberlebensrente für A, als die jüngere Person, suchen, so müfste man zwey Berechnungen anstellen, indem das Leben der A nach dem Abgang aller B noch fortdauert, und x, für A genommen, bis zu α wachsen kann.

§. 170.

Soll die Ueberlebensrente *aufgeschoben* werden, d. h. mit einem gewifsen Alter des Pensionisten, wenn nämlich dann der Versorger gestorben seyn sollte, anfangen, so findet man den Werth derselben folgendermaafsen. Da die ersten n Jahre in der vorhin angegebenen Zahlung wegfallen, so ist die gesuchte Ueberlebensrente =

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}(B - B^{\overline{n+1}})}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}(B - B^{\overline{n+2}})}{r^{n+2}} + \ldots\right) = \frac{1}{Ar^n}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots\right) -$$

$$\frac{1}{ABr^n}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,B^{\overline{n+1}}}{r} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,B^{\overline{n+2}}}{r^2} + \ldots\right) = \frac{A^{\overline{n}}}{Ar^n}\,\lambda\, \overline{a+n} - \frac{A^{\overline{n}}\,B^{\overline{n}}}{ABr^n} \times$$

$\overline{\lambda(a+n)(b+n)}$, d. h. die um n Jahre aufgeschobene Ueberlebensrente ist gleich einer um n Jahre aufgeschobenen Leibrente für A, weniger einer um diesel-

be Zeit aufgeschobenen Verbindungsrente für A und B.

Ex. Der Pensionist sey 5 Jahre alt, der Versorger 40; die Ueberlebensrente soll erst mit Ablauf des 15ten Jahrs des Pensionisten anfangen. Hier ist $\overline{a + n} = 15$, $\overline{b + n} = 50$; nach der Süfsmilchschen Sterbensordnung und dem 4 Procentfufse ist die um 10 Jahre aufgeschobene Leibrente für das Alter $5 = \frac{511}{579} \cdot 0{,}675564 \cdot 17{,}6104$, und eine um 10 Jahre aufgeschobene Verbindungsrente für die Jahre 5 und $40 = \frac{511 \cdot 300}{579 \cdot 374}\, 0{,}675564 \times 9{,}8279$. Man erhält also den gesuchten Werth $=$

$$\frac{511 \cdot 0{,}675564}{579}\left(17{,}6104 - \frac{300}{374} \cdot 9{,}8279\right) =$$

$$0{,}596223\ (17{,}6104 - 7{,}8833) = 5{,}7995.$$

Anm. Der angeführte Satz ergiebt sich auch auf folgende Art. Wenn das Alter des Pensionisten $= a$, und das des Versorgers $= b$ ist, so wird nach Ablauf des nten Jahrs der Pensionist $a + n$ und der Versorger $b + n$ Jahre alt. Würde nun der Einschufs für die Ueberlebensrente erst nach Ablauf der n Jahre bezahlt, und lebten beide Personen dann noch, so wäre der derzeitige Werth der Rente $= \lambda\overline{a+n} - \lambda\overline{(a+n)\ (b+n)}$. Wenn es ferner gewifs wäre, dafs beide Personen noch n Jahre lebten, so wäre der gegenwärtige Werth dieser Ueberlebensrente $= \frac{\lambda\,\overline{a + n} - \lambda\,\overline{(a + n)\ (b + n)}}{r^n}$. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, dafs A am Ende des nten Jahrs noch lebe $= \frac{\overset{n}{A}}{A}$, und dafs A und B zusammen dann noch leben, $=$

$\frac{A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}}}{A\,B}$; folglich wird der gesuchte Werth $=$

$$\frac{A^{\underline{n}}}{A\,rn}\,\lambda\,\overline{a + n} - \frac{A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}}}{A\,rn}\,\lambda\,\overline{(a + n)\,(b + n)}.$$

§. 171.

Sollte dagegen die Ueberlebensrente mit einem bestimmten Jahre des Pensionisten anfänglich vom Alter a *aufhören*, z. B. bey dem Jahre $a + n$, so suchte man auf dieselbe Art, wie im vorigen §. gezeigt worden, die um n Jahre aufgeschobene Ueberlebensrente, und zöge dieselbe von dem gegenwärtigen Werthe der vollen Ueberlebensrente ab, d. h. die mit dem nten Jahre aufhörende Ueberlebensrente für die mit B verbundene Person A ist $=$

$$\lambda a - \lambda\,\overline{ab} - \frac{A^{\underline{n}}}{A\,rn}\,\lambda\,\overline{a + n} +$$

$$\frac{A^{\underline{n}}\,B^{\underline{n}}}{A\,B\,rn}\,\lambda\,\overline{(a + n)\,(b + n)}.$$

Ex. Wenn, wie im vorigen §., der Versorger 40 und der Pensionist 5 Jahre alt wäre und die Rente mit deſsen 15ten Jahre aufhören sollte (wo also, wenn der Versorger dann noch leben sollte, gar keine Rente bezahlt würde), so wäre nach Süſsmilchs Sterbensordnung und dem Zinsfuſse von 4 Procent die volle Ueberlebensrente für das Alter von 5 Jahren $= 18{,}0017 - 11{,}4711 = 6{,}5306$. Die

bis zum 15ten Jahre aufgeschobene Ueberlebensrente für die nämliche Altersverbindung ist nach dem vorhergehenden §. = 5,7995; folglich wird der Werth der mit dem 15ten Jahre aufhörenden Ueberlebensrente = 6,5306 — 5,7995 = 0,7311.

§. 172.

Wenn die Ueberlebensrente sowohl mit einem bestimmten Alter a + n des Pensionisten anfangen als mit einem andern festgesetzten Alter a + n + m wieder aufhören sollte, so suchte man zuerst den Werth sowohl der um n Jahre als der um n + m Jahre aufgeschobenen Ueberlebensrente für die mit B verbundene Person A, und zöge den letztern Werth von dem erstern ab, wo dann der Unterschied das Gesuchte giebt, d. h. die hier bestimmte

Ueberlebensrente ist $= \frac{A^{\overline{n}}}{A\,rn} \lambda\, \overline{a + n} -$

$$\frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{A\,B\,rn} \lambda\, \overline{(a + n)\,(b + n)} -$$

$$\frac{A^{\overline{n+m}}}{A\,rn+m} \lambda\, \overline{a + n + m} +$$

$$\frac{A^{\overline{n+m}}\, B^{\overline{n+m}}}{A\,B\,rn+m} \lambda\, \overline{(a + n + m)\,(b + n + m)}.$$

§. 173.

So wie nach den vorhergehenden §. §. die

Zeit des Aufschubs für sich bestimmt war, kann sie auch von dem Leben des Versorgers abhängig gemacht werden, wenn nämlich *die Pension erst eine bestimmte Zeit nach dem Tode des Versorgers zu laufen anfangen soll.* Ist nun wieder das Alter des Pensionisten $= a$, des Versorgers aber $= b$, und soll die Ueberlebensrente n Jahre nach dem Tode des letztern anfangen zu laufen, so ist die erste Zahlung im $n + 1$ten Jahre, wo die Anzahl der lebenden $A = A^{\overline{n+1}}$, und die Anzahl der im ersten Jahre verstorbenen $B = B - B^{1}$ ist, folglich ist die Zahl der überlebenden zur Pension berechtigten $A = A^{\overline{n+1}}\,(B - B^{1})$, und der gegenwärtige Werth der Zahlung an dieselben $= \frac{A^{\overline{n+1}}\,(B - B^{1})}{r^{n+1}}$.

Eben so ist im $n + 2$ten Jahre die Anzahl der überlebenden zu pensionirenden $A = A^{\overline{n+2}}\,(B - B^{2})$, und der gegenwärtige Werth der Zahlung $=$

$\frac{A^{\overline{n+2}}\,(B - B^{2})}{r^{n+2}}$ etc. Wenn man diese baaren Zahlungen für alle Jahre zusammenlegt, und die Summe mit der anfänglichen Anzahl der Paare dividirt, so erhält man den baaren Werth der so bestimmten Ueberlebensrente $=$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{A^{\overline{n+1}}\,(B - B^{1})}{r^{n+1}} + \frac{A^{\overline{n+2}}\,(B - B^{2})}{r^{n+2}}\right.$$

$$+\frac{\overset{n+3}{A}\,(B - B^{3})}{r^{n+3}} + \ldots) = \frac{B}{AB}\left(\frac{\overset{n+1}{A}}{r^{n+1}} + \right.$$

$$\left.\frac{\overset{n+2}{A}}{r^{n+2}} + \frac{\overset{n+3}{A}}{r^{n+3}} + \ldots\right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\overset{n+1}{A}\,B^{1}}{r^{n+1}}\right.$$

$$\left. + \frac{\overset{n+2}{A}\,B^{2}}{r^{n+2}} + \frac{\overset{n+3}{A}\,B^{2}}{r^{n+3}} + \ldots\right) =$$

$$\frac{\overset{n}{A}}{A \cdot r^{n}}\,\lambda\,\overline{a+n} - \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^{n}}\,\lambda\,\overline{(a+n)\,b} =$$

$$\frac{\overset{n}{A}}{A\,r^{n}}\left(\lambda\,\overline{a+n} - \lambda\,\overline{(a+n)\,b}\right),$$ das heifst, von der Leibrente für das Alter $a + n$ wird die Verbindungsrente für die Leben b und $a + n$ abgezogen, und der Rest mit $\frac{\overset{n}{A}}{A\,r^{n}}$ multiplicirt.

§. 174.

Aufserdem können die Ueberlebensrenten noch auf manche Weise *bedingt* werden. Von diesen Bedingungen ist die gewöhnlichste, dafs die Ueberlebensrente nur bezahlt werden solle, falls *der Versorger und der Pensionist noch eine bestimmte Zeit zusammenleben*, sonst aber überall nicht. Wenn diese Zeit $=$ n und die Pension sonst nicht weiter aufgeschoben ist, so sind nach Ablauf der Zeit n der Pensionist und der Versorger, welche ursprünglich a und b Jahre alt gewesen seyn mögen, ersterer

vom Alter $\overline{a+n}$, letzterer $\overline{b+n}$, und die Ueberlebensrente wäre nach Ablauf dieser n Jahre $= \lambda\overline{a+n} - \lambda\overline{(a+n)(b+n)}$, wovon der gegenwärtige Werth $= \frac{\lambda\overline{a+n} - \lambda\overline{(a+n)(b+n)}}{r^n}$ ist. Da aber die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Paar, daſs es am Schluſse des nten Jahrs noch zusammen lebe, $= \frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\,B}$ ist, so wird die gesuchte Ueberlebensrente $=$

$$\frac{A^{\underline{n}}\, B^{\underline{n}}}{A\,B\,.\,r^n}\,.\,[\lambda\overline{a+n} - \lambda\overline{(a+n)(b+n)}\,].$$

Ex. Ein Ehemann von 40 Jahren will seiner Frau von 30 Jahren eine Wittwenpension versichern, jedoch unter der Bedingung, wenn er noch 5 Jahre mit ihr leben sollte; wie viel beträgt der Einschuſs für 1 Rthlr. Pension nach Süſsmilchs Mortalitätstafel und $r = 1{,}04$ gesetzt? Hier ist $\overline{a+n} = 35$, $\overline{b+n} = 45$, $A = 439$, $A^{\underline{n}} = 409$, $B = 374$, $B^{\underline{n}} = 339$, und $\frac{1}{r^n} = 0{,}821927$.

Also ist die Ueberlebensrente $= \frac{409\,.\,339}{439\,.\,374} \times 0{,}821927\,(14{,}1175 - 9{,}7091) = 0{,}694097\,.\,4{,}4084 = 3{,}0598$.

§. 175.

Die Bezahlung des *Einschuſses* für eine Ueber-

lebensrente geschieht entweder durch Erlegung einer ein für allemal bestimmten Summe oder durch Entrichtung eines jährlichen von dem Leben des Versorgers abhängenden Beitrags, oder, wie es gewöhnlich heifst, entweder auf den *Kapitalfufs* oder *Contributionsfufs*. Bey dem Kapitalfufs kann es indefsen doch gestattet werden, die einmal ausgemittelte Summe in gewifsen Terminen mit Zinsen und Zinseszinsen abzutragen.

Wird der Contributionsfufs angenommen, so pflegt die Zahlung nicht über die *Verbindungsdauer* hinausgesetzt zu werden, und man findet den Beitrag, welchen der Versorger für diesen Fall jährlich für die versicherte Ueberlebensrente zu zahlen hat, wenn man das Kapital der Ueberlebensrente als den Werth einer Verbindungsrente für den Versorger und Pensionisten ansieht, wo dann der Versorger jährlich so viel Thaler an Beitrag zu entrichten hat, als der baare Werth der mit 1 Rthlr. zu zahlenden Verbindungsrente in dem Kapital der Ueberlebensrente enthalten ist, d. h. wenn der Kapitalwerth der Ueberlebensrente $=$ V und der jährliche Beitrag $=$ C, so ist $C = \frac{V}{\lambda \overline{a\,b}}$. Wenn die eventuelle jährliche Pension P heifst, so ist $V = P(\lambda a - \lambda \overline{a\,b})$, und $C = P \cdot \frac{\lambda a - \lambda \overline{a\,b}}{\lambda \overline{a\,b}} = P\left(\frac{\lambda a}{\lambda \overline{ab}} - 1\right)$.

Soll der Beitrag mit dem Eintritt anfangen, und *bis zum Tode des Versorgers* fortdauern, so wird das Kapital der Ueberlebensrente mit der vollen Leibrente für das Alter des Versorgers dividirt, d. h., wenn V der baare Werth der Ueberlebensrente, C der jährliche Beitrag auf Lebzeit des Versorgers, vom Alter b, so ist $C = \frac{V}{\lambda . b}$, oder wenn P die eventuelle Pension ist, $C = P . \frac{\lambda a - \lambda \overline{ab}}{\lambda b}$.

Ex. Ein Vierzigjähriger versichert einer dreifsigjährigen Person eine Ueberlebensrente von 100 Rthlr, und will solche, so lange er und der Pensionist zusammen leben, auf den Contributionsfufs bezahlen, wie viel hat er nach Süfsmilchs Tabelle und dem Zinsfufs von 4 Procent jährlich zu entrichten? Die Ueberlebensrente für a = 30, wenn b = 40, ist = 4,3031, folglich sind für 100 Rthlr. zu entrichten 430,31. Nun ist die Verbindungsrente für $\overline{30 . 40} = 10{,}7816$, folglich $C = \frac{430{,}31}{10{,}7816}$ = 39,91. Wollte der Versorger den Beitrag bezahlen so lange er selbst lebte, wenn auch der Pensionist früher sterben sollte, so wäre im vorhergehenden Falle $\lambda b = 13{,}1565$, folglich würde für diesen Fall $C = \frac{430{,}31}{13{,}1565} = 32{,}71$.

Sollte der *jährliche Beitrag* entweder um n Jahre *aufgeschoben* werden oder auch mit dem nten Jahre *aufhören*, so müfste man im ersten Fall das

Kapital der Ueberlebensrente mit dem Werthe der um n Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente, im letzteren aber mit dem Werthe der um n Jahre aufhörenden Verbindungsrente dividiren.

Ex. Ein Dreifsigjähriger versichert einer fünf und zwanzigjährigen Person eine Ueberlebensrente von 100 Rthlr., will dieselbe aber, so lange er mit dem Pensionisten zusammenlebt, in jährlichen Beiträgen, nach Verlauf von 10 Jahren, bezahlen. Hier ist wieder nach Süfsmilch und zu 4 Procent das Kapital der Ueberlebensrente = 368,07, und der Werth der um 10 Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente für die Leben $\overline{25.30}$ nach §. 155 = 5,2394, folglich wird $C = \frac{368,07}{5,2394} = 70,25.$ Sollte dagegen der Beitrag mit dem Ende des 10ten Jahrs aufhören, so wäre der Werth der mit dem 10ten Jahre aufhörenden Verbindungsrente für die gegebenen Personen nach §. 156 = 5,1328, und also $C = \frac{368,07}{5,1328} = 71,71.$

§. 175. b.

Wenn auch die Ueberlebensrente aufgeschoben oder sonst auf eine andre Weise bedingt seyn sollte, so wird immer der Kapitalwerth derselben nach dem Vorhergehenden gefunden und dann, auf eine ähnliche Art, wie bereits gezeigt worden, der jährliche

Beitrag, deſsen Werth diesem Kapitalwerthe gleich ist, gesucht werden können.

§. 176.

Es bestehe eine fortwährende Gesellschaft von Ehepaaren und Wittwen mit der Bestimmung, daſs eine jede Wittwe jährlich 1 Rthlr. durch die Beiträge der stehenden Ehen erhalten solle; bey dem Eintritt sollen die Ehemänner vom Alter b, die Ehefrauen vom Alter a seyn, und bey dem Abgange eines Ehepaars tritt ein anderes, ebenfalls von der Altersverbindung $\overline{a\,b}$ ein, die Gesellschaft ist bereits zu dem Beharrungszustande gekommen; man sucht den baaren Werth der Zahlung jedes Ehepaars. Wenn jährlich A B Ehepaare hinzukommen und der Beharrungszustand eingetreten, d. h. wenn die gröſste Alterergänzung abgelaufen ist, so ist fortwährend die Zahl der bestehenden Ehen $= A^1 B^1 + A^2 B^2 + \,.\,.\, A^{\underline{y}} B^{\underline{y}} = \int \overline{A'^1\ B^1}$, wo die Reihe bis zur kleinsten Alterergänzung y fortgeht. Ferner ist fortwährend die Zahl der Wittwen in der Gesellschaft $= A^1 (B - B^1) + A^2 (B - B^2) + \,.\,.\, + A^{\underline{x}} (B - B^{\underline{x}}) = B (A^1 + A^2 + \,.\,.\, + A^{\underline{x}}) - A^1 B^1 + A^2 B^2 + \,.\,.\, + A^{\underline{y}} B^{\underline{y}} = B \int A'^1 - \int \overline{A'^1\ B'^1}$. Da eine jede Wittwe jährlich 1 Rthlr. erhalten soll, so ist der jährliche Beitrag jeder stehenden Ehe =

$$\frac{B \int A'^{1} - \int \overline{A'^{1} B'^{1}}}{\int \overline{A'^{1} B'^{1}}} = \frac{\frac{B \int A'^{1}}{AB} - \frac{\int \overline{A'^{1} B^{1}}}{AB}}{\frac{\int A'^{1} B^{1}}{AB}}$$

$= \frac{E\,a - E\,\overline{a\,b}}{E\,\overline{a\,b}}$. Da ferner dieser jährliche Beitrag bezahlt werden soll, so lange beide Eheleute zusammenleben, so ist der gegenwärtige Werth des ganzen Beitrags $= \frac{E\,a - E\,\overline{a\,b}}{E\,\overline{a\,b}} \cdot \lambda\,\overline{a\,b}$, welcher Werth sich zu dem gewöhnlichen Werthe der Wittwenrente oder $\lambda\,a - \lambda\,\overline{a\,b}$ verhält wie

$$\frac{E\,a - E\,\overline{a\,b}}{E\,\overline{a\,b}} : \frac{\lambda\,a - \lambda\,\overline{a\,b}}{\lambda\,\overline{ab}}.$$

Ex. Es sey $a = 40$, $b = 50$, so ist, nach Süſsmilch und zu 4 Procent gerechnet,

$$\frac{E\,a - E\,\overline{a\,b}}{E\,\overline{a\,b}} \cdot \lambda\,\overline{a\,b} = \frac{22{,}64 - 12{,}70}{12{,}70} \times$$

$8{,}6531 = 6{,}772$. Der Werth der gewöhnlichen Pension ist nur $= 4{,}503$.

Anm. Die in diesem §. angenommene Voraussetzung lag einem Theile der früheren Wittwenkassen zum Grunde. Die stehenden Ehen sollten die Wittwen versorgen, und man hielt dies um so leichter, da man das Verhältniſs der Anzahl der Ehen zu der Wittwenzahl nur nach unvollständigen Erfahrungen beurtheilte, und es danach für zu groſs annahm. Bey Gelegenheit der Verhandlungen über die derzeitige Calenbergische Wittwenkasse ward sogar behauptet, daſs dies Verhältniſs we-

nigstens = 4 : 1 sey. [Der im gegenwärtigen §. angeführte Ausdruck giebt das wahre Verhältniſs der Ehen zu der Wittwenzahl für den Beharrungsstand an. Wenn z. B. das Alter der Ehemänner = $47\frac{1}{2}$ und der Ehefrauen = 40 Jahre, so ist dies Verhältniſs zufolge Süſsmilchs Sterbensordnung = 13,37 : 22,64 — 13,37 = 13,37 : 9,27 = 1,44 : 1, folglich kommen dann nicht völlig 3 Ehen auf 2 Wittwen.] Die Erfahrung zeigte bald, daſs man auf zu wenig Pensionisten gerechnet hatte; die hierauf gegründeten Anstalten gingen unter oder wurden umgeformt. Jetzt wird man wohl bey öffentlichen Einrichtungen nicht wieder auf eine ähnliche Idee verfallen; indeſsen können Privat-Anstalten vorkommen, worauf die hier aufgestellte Aufgabe anzuwenden ist.

In Ansehung des anscheinenden Paradoxon, daſs hier fortwährend von den stehenden Ehen mehr bezahlt werden könne, als der wahre Werth der Pension beträgt, verweise ich auf §. 106 vorher.

Anm. 2. In den vorhergehenden §. §. sind die theoretischen Vorschriften zur Einrichtung der *Wittwen-* und *Waisen-Kaſsen* enthalten, denen ich noch folgende Bemerkungen hinzufüge.

1). Was die den Kaſsen dieser Art zum Grunde zu legende Sterbensordnung betrifft, so erfordert dieser Punct eine mehrseitige Aufmerksamkeit, indem hier nicht, wie bey Leibrenten, gerade diejenige Sterblichkeitsordnung, wonach die Sterblichkeit am geringsten ausfällt, für die Kaſse am vortheilhaftesten ist. Da die Ueberlebensrenten nämlich durch Subtraction der Verbindungsrenten von den Leibrenten gefunden werden, so kömmt es bey der Vergleichung der Ueberlebensrenten nach zwey verschiedenen Sterblichkeitsordnungen auf das Verhältniſs sowohl der Leibrenten als Verbindungsrenten an, und es können daher auch die Ueberlebensrenten nach einer Sterbensordnung gröſser seyn als nach einer andern, wenn gleich die Sterblichkeit nach der ersteren gröſser ist als nach der letzteren.

So sind z. B., wenn die Unterschiede des Alters unter den beiden verbundenen Personen nicht groſs, z. B. nicht gröſser als 10 Jahre sind, die Ueberlebensrenten sowohl für die jüngere als die ältere Person bis etwa an das sechzigste Altersjahr nach der Süſsmilchschen Sterbensordnung gröſser als nach der Wargentinschen. Wenn der Unterschied des Alters dagegen beträchtlicher ist, so können die Ueberlebensrenten für die jüngere Person nach Wargentin bedeutend gröſser werden als nach Süſsmilch. So ist z. B. bey einer Verbindung zwischen einer achtzigjährigen und einer vierzigjährigen Person die Ueberlebensrente für die letzte zu 4 Procent nach Süſsmilch = 9,508, nach Wargentin aber = 10,953. Bey dem Tarif einer *Wittwenkaſse*, wo der Unterschied des Alters der verbundenen Personen im Durchschnitt nicht groſs ist, (bey der Kopenhagener Wittwenkaſse ist er im Durchschnitt etwa 8 Jahre) könnte man nach den bisherigen Erfahrungen mit Sicherheit die Süſsmilchsche Sterbensordnung zum Grunde gen. Wenn aber etwa die Anstalt ganz oder zum Theil eine *Waisenkaſse* seyn sollte, so würde man mit mehrerer Sorgfalt zu prüfen haben, ob man dafür die nämliche oder welche andre Sterbensordnung zur Grundlage annehmen sollte.

2). Bey Wittwen- oder Waisen-Kaſsen von beträchtlichem Umfange kann man den Tarif für die einzelnen Jahre der verbundenen Personen bestimmen. Bey der Kopenhagener Wittwenkaſse z. B. enthält der Tarif den Ansatz für alle Combinationen zwischen dem Alter des Mannes vom 22sten bis zum 60sten, und dem Alter der Frau vom 14ten bis zum 60sten Jahre. Bey kleinen Gesellschaften scheint dies jedoch weder nöthig noch rathsam zu seyn; die Angaben der Mortalitätstabellen und die darauf gegründeten Berechnungen können ihrer Natur nach nur mit dem Durchschnitt einer beträchtlichen Anzahl von Fällen zusammenstimmen, und es ist keinesweges zu erwarten, daſs sie bey einzelnen Fällen zutreffen. Es scheint daher zuträglicher, den Ansatz etwa von fünf zu fünf Jahren

sowohl für das Alter des Pensionisten als des Versorgers zu bestimmen, wobey denn wohl die höchste innerhalb der Gränzen der Klaſse vorkommende Taxe als Norm für die ganze Klaſse anzunehmen wäre. Soll eine Kaſse dieser Art nur für einen sehr beschränkten Umfang errichtet werden, so könnte man die Taxe wohl allein nach dem Unterschiede des Alters des Versorgers und Pensionisten bestimmen; denn auf diesen Unterschied kömmt es hauptsächlich an, und bey gleichem Unterschiede des Alters sind die Ueberlebensrenten nicht sehr verschieden, sie mögen für ein jüngeres oder älteres Paar gesucht werden. Wenn z. B. der Mann acht Jahr älter ist als die Frau, so ist vom 16ten Jahre der Frau an bis zum 52sten die höchste Ueberlebensrente bey dem 40sten Jahre = 4,269, die niedrigste bey dem 16ten Jahre = 3,819. Nimmt man aber alle Taxen vom 16ten Jahre bis zum 52sten zusammen und dividirt mit 37, als der Anzahl derselben, so erhält man zum Durchschnitt 4,113, welchen man um so mehr als eine allgemeine Taxe für alle Fälle, wo der Mann 8 Jahr älter ist als die Frau, ansehen kann, da sicher die meisten Ehepaare beym Eintritt in die Anstalt jünger sind als $\overline{47 . 39}$, wozu diese mittlere Ueberlebensrente eigentlich gehört.

3) Ueber das *Wiederheirathen der Wittwen* hat man hin und wieder Erfahrungen gesammelt und bey einigen Wittwenkaſsen ist darauf gerechnet. Das Widerverheirathen findet am meisten Statt bey solchen Wittwen, die nach dem Tode des Mannes in irgend einem Gewerbe oder in einem Besitz von Geldeswerth verbleiben, vielleicht am häufigsten unter Landleuten, wenn mit der Wittwe der Hof auf einen neuen Ehemann übergeht. Solche allgemeine Erfahrungen auf Wittwenkaſsen, die gewöhnlich in einer ausgesuchten Gesellschaft bestehn, anzuwenden, halte ich für bedenklich, und ich würde rathen, dies Moment aus der Berechnung gänzlich wegzulaſsen. Uebrigens wird dennoch festgesetzt werden können, daſs die Wittwenpensionen, wenn eine Wittwe wieder in den Ehestand tritt und so lan-

ge sie darin bleibt, der Kafse anheimfallen, die dadurch immer einige Erleichterung erhält.

4). Der *Contributionsfuſs*, wie angenehm er auch für die Interefsenten seyn mag, ist für die Kafse, zumal wenn sie nur von beschränktem Umfange ist, nicht zu empfehlen; sie trägt dabey ein doppeltes Risico, einmal daſs der Contribuent vor der erwarteten Zeit sterbe, das andremal, daſs der Pensionist über die berechnete Zeit lebe, zumal da vorauszusehen ist, daſs die meisten Versorger, wenn ihnen anders die Wahl freygelafsen ist, den Contributionsfuſs vorziehen werden. Jede Kafse dieser Art sollte es sich daher zur Regel machen, die Zahlung nur auf den Kapitalfuſs anzunehmen, und nur dadurch den Versorgern eine Erleichterung zuzugestehn, daſs sie die unbedingt festgesetzte Einschuſssumme in bestimmten Terminen mit Zinsen und Zinseszinsen abtragen können.

5). Auch bey Kafsen dieser Art ist eine von Zeit zu Zeit vorzunehmende *Revision* sehr zu empfehlen. Wie das Credit der Kafse zu berechnen sey, ergiebt sich von selbst; werden Contributionen angenommen, so wird der Werth derselben, je nachdem sie während des Lebens beider Verbundenen oder eines derselben bezahlt werden, nach dem Tarif der Verbindungs- oder Leib-Renten berechnet. Was das Debet betrifft, so berechnet man den Werth der actuellen Pensionen nach der Leibrenten-Tabelle, den Werth der eventuellen Pensionen nach dem Tarif der Wittwenpensionen. Da aber bey dem Beharrungsstande der Gesellschaft der erste Theil der Schuld wohl noch gröſser werden kann als der letztere, so möchte es rathsam seyn, die Berechnung einmal nach einer Sterbensordnung, wonach die Ueberlebensrenten am grösten ausfallen, das andremal nach einer Sterbensordnung, wonach die Leibrenten am gröſsten sind, anzustellen. Wenn übrigens auch bey den ersten Revisionen die Bilanz der Kafse günstig ausfallen sollte, so darf man sich dadurch der fernern Prüfung nicht überhoben glauben; denn wenn der Eintritt der Ehepaare gleichmäſsig fort-

währt, so wächst die Anzahl der Wittwen so lange bis die Altersergänzung der jüngsten Ehefrau von der Errichtung der Gesellschaft an verflossen ist, folglich wenn Ehepaare von jedem Alter eintreten, während eines Zeitraumes von 70 bis 75 Jahren.

Diese Kassen-Revision wird indessen hier dadurch erschwert, dass das Conto der stehenden Ehen selten genau aufzumachen ist, indem der Tod der Ehefrauen, wenn sie vor den Männern sterben, nicht immer bey der Kasse bekannt wird. Als vor einigen Jahren die Bilanz der Kopenhagener Wittwenkasse aufgemacht wurde, fand sich eine unverhältnissmässig grosse Anzahl stehender Ehen; bey näherer Nachsicht zeigte sich, dass viele derselben lange aufgelöset oder ausgestorben waren, und dass, obgleich jeder Ehemann bey einer Geldbusse von 20 Rthl. verpflichtet ist, den Tod seiner Ehefran innerhalb 6 Wochen anzuzeigen, diese Vorschrift in vielen Fällen nicht befolgt war. Man musste Erkundigungen einziehen so viel man konnte, und am Ende nach dem Bekannten eine approximative Berechnung über das Unbekannte anstellen. In dieser Hinsicht könnte es zweckmässig seyn, bey Wittwenkassen zu bestimmen dass bey dem Eintritt, ausser dem Werthe der Pension, noch eine verhältnissmässige Summe zur Kasse erlegt werden müsse die an den Ehemann, wenn die Frau vor ihm stirbt, zurückbezahlt würde.

Wie eine Revision dieser Art übrigens anzustellen sey, ersieht man aus der: *Nachricht von dem Zustande der allgemeinen Wittwenkasse zu Kopenhagen am Schlusse des Jahrs* 1797 *etc.* von *J. N. Tetens, Kopenhagen,* 1803.

Viertes Kapitel.

Von der Rente auf das längste Leben unter zweyen.

§. 177.

Die Rente für den Längstlebenden unter zweyen wird bezahlt, so lange beide Personen zusammen leben oder irgend eine von ihnen, sey es welche es wolle, übrig ist. Wenn die anfängliche Zahl der Paare $= AB$, so ist die Zahl der Paare, welche am Ende des nten Jahrs ganz ausgestorben sind, $= (A - A^{\underline{n}})(B - B^{\underline{n}}) = AB - A^{\underline{n}}B - AB^{\underline{n}} + A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}$, folglich die Zahl derer Paare, wovon noch irgend Jemand lebt, $= AB - AB + A^{\underline{n}}B + AB^{\underline{n}} - A^{\underline{n}}B^{\underline{n}} = A^{\underline{n}}B + AB^{\underline{n}} - A^{\underline{n}}B^{\underline{n}}$. Also wird die Rente des Längstlebenden $= \frac{1}{AB}\left(\frac{A^1B}{r} + \frac{AB^1}{r} - \frac{B^1B^1}{r} + \frac{A^2B}{r^2} + \frac{AB^2}{r^2} - \frac{A^2B^2}{r^2} + \ldots\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{A^1}{r} + \frac{A^2}{r^2} + \ldots\right) + \frac{1}{B}\left(\frac{B^1}{r} + \frac{B^2}{r^2} + \ldots\right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{A^1B^1}{r}\right.$

$+ \frac{A^3 B^2}{r^2} + \ldots) = \lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab}$, d. h. die Rente des Längstlebenden unter zweyen ist gleich der Summe der Leibrenten für beide einzelne Personen, weniger der Verbindungsrente für beide zusammengenommen. Wenn a = b wäre, so würde der Werth der Rente auf das längste Leben $= 2\lambda a - \lambda \overline{ab}$.

Ex. Wenn die eine der beiden Personen 25 und die andre 30 Jahre alt ist, so wird nach der Süſsmilchschen Sterblichkeitstafel und dem Zinsfuſse von 4 Procent $\lambda a = 15{,}9870$, $\lambda b = 15{,}0847$, und $\lambda \overline{ab} = 12{,}3063$, folglich $\lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab} = 15{,}9870 + 15{,}0847 - 12{,}3063 = 18{,}7654$.

Anm. Die Sache ist auch so anzusehen, als ob einer jeden der beiden Personen eine Leibrente versichert wäre; da sie indeſsen auf diese Weise die Rente, so lange sie beide leben, doppelt erhalten würden, so haben sie den einmaligen Werth dieser Rente für die Zeit ihrer Verbindung zurückzuzahlen. Es ist demnach die Rente für den Längstlebenden unter zwey Personen vom Alter a und b $= \lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab}$. (Vergl. §. 140).

§. 178.

Wenn die Rente auch für diejenigen, welche im Laufe jedes Jahrs sterben, nach Verhältniſs der Zeit, welche sie noch erleben, überhaupt aber am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, so muſs sowohl zu λa und λb als $\lambda \overline{ab}$ die Correction hinzugefügt werden. Danach wird also die Rente auf das läng-

ste Leben $= (1 - \frac{1}{2pr}) (\lambda a + \lambda b) + \frac{1}{r}$
$- (1 - \frac{1}{2pr}) \lambda \overline{ab} - \frac{1}{2r} =$
$(1 - \frac{1}{2pr}) (\lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab}) + \frac{1}{2r}.$

Anm. Genau genommen müſste zu dem angegebenen Werthe noch $\frac{1}{6r} \int \frac{\Delta A^2 \Delta B^2}{r^0 AB}$ hinzugefügt werden, indeſsen kann dieser Theil, als gegen λa und λb unbedeutend, wohl wegfallen.

§. 179.

Sollte aber die Rente in Terminen während des Jahrs bezahlt werden, so wäre der Werth der Zinsen nach Analogie deſsen, was in den §. §. 69 und 149 bey den Leibrenten und Verbindungsrenten angeführt worden, hinzuzufügen.

Wären die Termine augenblicklich, und würde dabey die Rente auch für diejenigen, die in jedem Jahre abgehen, nach Verhältniſs ihres Lebens bezahlt, so erhielte man den Werth der Rente $=$
$\frac{\pi}{pr} (\frac{\pi}{p} \lambda a + \frac{\pi}{p} \lambda b + 2pr - 2\pi) - \frac{\pi}{pr} \times$
$(\frac{\pi}{p} \lambda \overline{ab} + pr - \pi)$ (§. 70 und 150) $= \frac{\pi}{pr} [\frac{\pi}{p} \times$
$(\lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab}) + pr - \pi].$

Anm. Auch hier kann man das kleinere Stück der Correc-

tion für die Verbindungsrente, nämlich $\frac{1}{6r}\int\frac{\Delta A^2\ \Delta B^2}{r^o\ A B}$, welches hier ausgelassen ist, wenn α und β dem Lebensziel sehr nahe sind, noch hinzufügen.

§. 180.

Wenn die Rente für den Längstlebenden um n Jahre aufgeschoben werden sollte, so müsste der Werth der beiden aufgeschobenen Leibrenten addirt und von dieser Summe der Werth der aufgeschobenen Verbindungsrente abgezogen werden, d. h. es wäre der Werth der aufgeschobenen Rente des Längstlebenden $= \frac{A^{\overset{n}{-}}}{A\, r^n}\ \lambda\, \overline{a + n} + \frac{B^{\overset{n}{-}}}{B\, r^n} \times$

$$\lambda\, \overline{a + n} - \frac{A^{\overset{n}{-}}\ B^{\overset{n}{-}}}{A\, B\, r^n}\ \lambda\, \overline{(a + n)\ (b + n)}.$$

§. 181.

Die Rente für den Längstlebenden kann auch eine, *Ueberlebensrente* seyn, wenn sie nämlich bezahlt werden soll, nach aufgelöseter Verbindung, entweder an A oder an B, so lange eine der beiden Personen lebt. In diesem Falle muss also von dem vorher im §. 177 gefundenen Werthe noch einmal der Werth der Verbindungsrente für die beiden Personen abgezogen werden, und die Ueberlebensrente für den Längstlebenden unter zweyen wird daher $= \lambda a + \lambda b - 2\,\lambda\, \overline{a\, b}$. Wären beide Personen von

gleichem Alter, so wäre dieser Werth $= 2\,(\lambda a - \lambda\overline{aa})$.

Ex. Wenn wieder a = 25 und b = 30 ist, so hat man nach Süſsmilchs Tabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent $\lambda a = 15{,}9870$, $\lambda b = 15{,}0847$, $\lambda\overline{ab} = 12{,}3063$, folglich die Ueberlebensrente für das längste Leben $= 15{,}9870 + 15{,}0847 - 2 \cdot 12{,}3063 = 6{,}4591$.

Anm. Däſselbe Resultat erhielte man, wenn man die Renten für alle die Fälle, wo ein Ueberleben unter zwey Personen Statt findet, zusammenlegte; man hätte nämlich hier den Werth der gesuchten Rente $= \int \frac{A'^1\,(B - B'^1)}{A\,B\,r^1} +$

$$\int \frac{B'^1\,(A - A'^1)}{A\,B\,r^1} = \int \frac{A'^1}{A\,r^1} - \int \frac{A'^1\,B'^1}{A\,B\,r^1}$$

$$+ \int \frac{B'^1}{B\,r^1} - \int \frac{A'^1\,B'^1}{A\,B\,r^1} = \lambda a + \lambda b - 2\,\lambda\,\overline{a\,b}.$$

§. 181. b.

Sollte diese Ueberlebensrente auch für diejenigen, die im Laufe jedes Jahrs sterben, bezahlt werden, und zwar nach Verhältniſs der Zeit, aber am Ende des Jahrs, so würde ihr Werth =

$$(1 - \frac{1}{2\,pr})\,(\lambda a + \lambda b) + \frac{1}{r} -$$

$$(1 - \frac{1}{2\,pr})\,2\,\lambda\overline{a\,b} - \frac{1}{r} = (1 - \frac{1}{2\,pr})\,(\lambda a +$$

$$\lambda b - 2\,\lambda\,\overline{a\,b}).$$

Ex. In dem vorigen Falle, wenn nämlich a

$= 25$ und $b = 30$, erhielte man also den Werth $= (1 - \frac{1}{52})\, 6{,}4591 = \frac{51}{52}\, 6{,}4591 = 6{,}3349$.

§. 182.

Der Antheil jedes Einzelnen an der Rente des Längstlebenden ist für $A = \lambda a - \frac{1}{2} \lambda \overline{ab}$, und für $B = \lambda b - \frac{1}{2} \lambda \overline{ab}$. An der Ueberlebensrente auf das längste Leben wäre der Antheil von $A = \lambda a - \lambda \overline{ab}$, für B aber $= \lambda b - \lambda \overline{ab}$.

Fünftes Kapitel.

Von Anwartschaften, die von zweyer Personen Leben abhangen.

---

§. 183.

Zwey Personen, eine vom Alter a die andre vom Alter b, haben nach Ablauf von n Jahren eine Summe $= 1$ zu erwarten, falls sie dann beide noch leben sollten (widrigenfalls ihr Anrecht ganz wegfällt); es wird der Werth dieser Anwartschaft ge-

sucht. Der Werth der Summe, wenn sie unbedingt am Ende des nten Jahrs bezahlt werden sollte, wäre $= \frac{1}{r^n}$; da aber die Wahrscheinlichkeit, daſs beide Personen am Ende des nten Jahrs noch leben, $= \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{A\ B}$ ist, so wird der Werth unter der angegebenen Voraussetzung $= \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{A . B\, r^n}$.

§. 184.

Sollte die Summe wieder am Ende des nten Jahrs bezahlt werden, falls B dann todt wäre und A lebte, so wäre, da die Wahrscheinlichkeit, daſs dann A nach dem Tode von B lebe, $=$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,(B - B^{\overline{n}})}{A\ B} = \frac{A^{\overline{n}}}{A} - \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{A\ B};$$

ist, der gegenwärtige Werth der Summe $=$

$$\frac{A^{\overline{n}}\,(B - B^{\overline{n}})}{A\, B\, r^n} = \left(\frac{A^{\overline{n}}}{A} - \frac{A^{\overline{n}}\, B^{\overline{n}}}{A\ B}\right) \times \frac{1}{r^n}.$$

§. 185.

Wenn die Summe 1 am Ende des nten Jahrs auf den Fall bezahlt werden sollte, daſs irgend eine

der Personen des Paars dann noch lebte, so ist die Anzahl der am Schluſse des nten Jahrs ganz ausgestorbenen Paare $= (A - \overset{n}{A})(B - \overset{n}{B})$, folglich die Anzahl derer Paare, welche noch nicht ganz ausgestorben sind, $= AB - (A - \overset{n}{A})(B - \overset{n}{B})$, und die Wahrscheinlichkeit für ein Paar, daſs irgend eine Person deſselben am Ende des nten Jahrs noch lebe, ist $= \frac{AB - (A - \overset{n}{A})(B - \overset{n}{B})}{AB}$

$$= \frac{\overset{n}{A}}{A} + \frac{\overset{n}{B}}{B} - \frac{\overset{n}{A}\,\overset{n}{B}}{AB}.$$

Folglich wird der gesuchte Werth $= \left(\frac{\overset{n}{A}}{A} + \frac{\overset{n}{B}}{B} - \frac{\overset{n}{A}\,\overset{n}{B}}{AB}\right)\frac{1}{r^n}$.

§. 186.

Sollte die Summe 1 am Ende des nten Jahrs unter der Bedingung bezahlt werden, daſs beide Personen dann todt wären, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs sowohl A als B am Ende des nten Jahrs verstorben sind, $= \frac{(A - \overset{n}{A})(B - \overset{n}{B})}{AB}$

$$= 1 - \frac{\overset{n}{A}}{A} - \frac{\overset{n}{B}}{B} + \frac{\overset{n}{A}\,\overset{n}{B}}{AB},$$

und der gesuchte Werth der Summe 1 wäre demnach $= \left(1 - \frac{\overset{n}{A}}{A} - \frac{\overset{n}{B}}{B} + \frac{\overset{n}{A}\,\overset{n}{B}}{A\,B}\right) \times \frac{1}{r^n}$.

§. 187.

Wenn eine Anzahl von Paaren, bestehend aus einer Person vom Alter a und einer andern vom Alter b, sich dahin verbände, daſs bey der Auflösung eines jeden Paars, sey es durch den Tod des einen oder auch beider Genoſsen, und zwar am Ende des Jahrs, worin die Auflösung geschieht, ein für allemal 1 Rthlr. bezahlt werden sollte, so wäre der gegenwärtige Werth eines solchen Thalers für jedes Paar $= \frac{1}{A\,B}\left(\frac{\Delta\,(A\,B)}{r} + \frac{\Delta\,(\overset{1}{A}\,\overset{1}{B})}{r^2} + \frac{\Delta\,(\overset{2}{A}\,\overset{2}{B})}{r^3} + \ldots\right) = \vartheta\,\overline{ab}$, wie solches schon oben im §. 146 bestimmt worden, nämlich $= \frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{p\,r}$. Sollten die Zinsen des Thalers vom Anfange des Jahrs an gerechnet werden, worin das Paar aufgelöset wird, so wäre der jetzige Werth des so bestimmten Thalers $= r\,\vartheta\,\overline{a\,b} = 1 - \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{p}$.

§. 188.

Wollte man annehmen, daſs die Verbindungen

im Durchschnitt in der Mitte des Jahrs aufhören, und dann der Sterbethaler für alle aufgelösete Verbindungen bezahlt werden sollte, so wäre der Werth $= r^{\frac{1}{2}} \vartheta \, \overline{ab}$. Für $r = 1{,}04$ hätte man also hiernach den Werth $= 1{,}019804 \cdot \vartheta \, (\overline{ab})$.

Wenn aber der Abgang der einzelnen Personen innerhalb jedes Jahrs gleichmäſsig geschieht, so muſs die Anzahl der in gleichen Zeiten aufhörenden Verbindungen vom Anfang des Jahrs an bis zum Ende deſselben succeſsiv abnehmen. Den genauen Werth der sofort bey der Auflösung jedes Paars zu zahlenden Summe 1 erhält man durch folgende Berechnung. Wenn AB die anfängliche Zahl der Paare ist und das Jahr in n gleiche Theile getheilt wird, so ist die Anzahl der am Ende des 1sten $\frac{1}{n}$ Theils bestehenden Paare $= (A - \frac{\Delta A}{n})(B - \frac{\Delta B}{n}) = AB - \frac{\Delta A . B}{n} - \frac{\Delta B . A}{n} + \frac{\Delta A . \Delta B}{n \; n}$, am Ende des 2ten $\frac{1}{n}$ Theils ist diese Anzahl $= (A - \frac{2 \Delta A}{n})(B - \frac{2 \Delta B}{n}) = AB - \frac{2 \Delta A . B}{n} - \frac{2 \Delta B . A}{n} + \frac{2^2 \Delta A \, \Delta B}{n \; n}$, etc. und am Schlusse des letzten $\frac{1}{n}$ Theils $= (A - \frac{n}{n} \Delta A)(B - \frac{n}{n} \Delta B) = AB - \frac{n \Delta A . B}{n} - \frac{n \Delta B . A}{n}$

$+\frac{n^2 \Delta A . \Delta B}{n^2}$. Wenn man nun von der Anzahl der Paare, die im Anfang jedes Zeittheils existirt, die Anzahl, welche am Ende des Zeittheils übrig bleibt, abzieht, so ist die Anzahl der während jedes Zeittheils aufgelöseten Verbindungen nach einander

$$\frac{1}{n}\Delta A . B + \frac{1}{n}\Delta B . A - \frac{1}{n^2}\Delta A . \Delta B,$$

$$\frac{1}{n}\Delta A . B + \frac{1}{n}\Delta B . A - \frac{(2^2 - 1)}{n^2}\Delta A . \Delta B,$$

$$\frac{1}{n}\Delta A . B + \frac{1}{n}\Delta B . A - \frac{(3^2 - 2^2)}{n^2}\Delta A . \Delta B,$$

etc. etc.

$$\frac{1}{n}\Delta A . B + \frac{1}{n}\Delta B . A - \frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2}\Delta A . \Delta B.$$

Discontirt man jeden Theil auf den Anfang des Jahrs, und dividirt durch AB, so erhält man den über alle Paare vertheilten Werth der Zahlungen des ersten Jahrs $= \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right) \frac{A . \Delta B + B . \Delta A}{n\, AB} -$

$$\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{2^2 - 1}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3^2 - 2^2}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{r^{\frac{n}{n}}}\right) \frac{\Delta A . \Delta B}{n^2\, AB}.$$

Der erste

Theil ist $= \frac{1}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)} \left(1 - \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right) \times$

$\frac{A \Delta B + B \Delta A}{A B} = \frac{r-1}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)r} \times$

$\frac{A \Delta B + B \Delta A}{A B}$; setzt man aber $n = \infty$;

so wird dieser Theil $= \frac{r-1}{r(\log \text{nat. } r)} \times$

$\frac{A \Delta B + B \Delta A}{A B} = \frac{\pi}{pr} \frac{A \Delta B + B \Delta A}{A B}$.

Der zweite Theil ist $= \Bigg([1 - \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}] [\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} +$

$\frac{2^2}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{3^2}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots + \frac{n^2}{r^{\frac{n}{n}}}] + \frac{n^2}{r^{\frac{n+1}{n}}} \Bigg) \times$

$\frac{\Delta A . \Delta B}{n^2 AB} = \Bigg(\frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r^{\frac{1}{n}}} (\frac{(\frac{1}{n})^2}{r^{\frac{1}{n}}} +$

$\frac{(\frac{2}{n})^2}{r^{\frac{2}{n}}} + \frac{(\frac{3}{n})^2}{r^{\frac{3}{n}}} + \ldots +$

$$\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{r^{\frac{n}{n}}}) + \frac{1}{r^{\frac{n+1}{n}}} \Bigg\} \frac{\Delta A . \Delta B}{A . B}$$; wenn aber $n = \infty$ gesetzt wird, so ist $r^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\text{log. nat. } r}{n} = \frac{1}{\pi . n} = \frac{dx}{\pi}$, ferner $r^{\frac{1}{n}} = 1$ und $r^{\frac{n+1}{n}} = r^{\frac{n}{n}} = r$; folglich wird dann der zweite Theil $= \left\{\frac{1}{\pi}\int\frac{x^2\,dx}{rx} + \frac{1}{r}\right\} \times \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$, und nach §. 42, da nach der Integration $x = 1$ gesetzt werden muſs, $=$

$$\left\{2\pi^2 - \frac{1 + 2\pi + 2\pi^2}{r} + \frac{1}{r}\right\} \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$$

$$= \left\{2\pi^2 - \frac{2\pi}{r} - \frac{2\pi^2}{r}\right\} \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B} =$$

$$\left\{\frac{2\pi^2(r-1)}{r} - \frac{2\pi p}{pr}\right\} \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$$

$= \frac{\pi}{pr}(2\pi - 2p)\frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$. Danach wird also der Werth der Zahlungen des ersten Jahrs $=$

$$\frac{\pi}{pr} \frac{A\,\Delta B + B\,\Delta A}{A\,B} - \frac{\pi}{pr}(2\pi - 2p) \times \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B} = \frac{\pi}{pr}\frac{A\,\Delta B + B\,\Delta A - \Delta A . \Delta B}{A\,B}$$

$$+ \frac{\pi}{pr}(1 + 2p - 2\pi)\frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$$

$$= \frac{\pi}{pr} \frac{\Delta\,(A\,B)}{A\,B} + \frac{\pi}{pr}(1+2p-2\pi)\frac{\Delta\,A\,.\,\Delta\,B}{A\,B}.$$

Eben so erhält man für das zweite Jahr den baaren Werth $= \frac{\pi}{pr} \frac{\Delta\,(A^1 B^1)}{A\,B\,r} + \frac{\pi}{pr}(1+2p-2\pi) \times \frac{\Delta A^1 . \Delta B^1}{A\,B\,r}$, so wie für das dritte Jahr $= \frac{\pi}{pr} \frac{\Delta\,(A^2\,B^2)}{A\,B\,r^2} + \frac{\pi}{pr}\,(1 + 2p - 2\pi) \times \frac{\Delta\,A^2 . \Delta\,B^2}{A\,B\,r^2}$ etc. etc.

Für alle Jahre ergiebt sich also hieraus der Werth $= \frac{\pi}{pr} \int \frac{\Delta\,(A^0\,B^0)}{r^0\,A\,B} + \frac{\pi}{pr}\,(1 + 2p - 2\pi) \int \frac{\Delta A^0 . \Delta\,B^0}{r^0\,A\,B} = \frac{\pi}{p}\,\vartheta\,\overline{ab} + \frac{\pi}{pr}\,(1 + 2p - 2\,\pi) \int \frac{\Delta\,A^0 . \Delta\,B^0}{r^0\,A\,B}$.

Für $r = 1{,}04$ wird $\frac{\pi}{p} = 1{,}019868$, $\frac{\pi}{pr} = 0{,}980643$, und $\frac{\pi}{pr}(1 + 2p - 2\pi) = 0{,}006410$.

Da nun ohnehin $\int \frac{\Delta\,A^0 . \Delta\,B^0}{r^0\,A\,B}$ nur ein kleiner ächter Bruch ist, so kann man wohl $0{,}006410 \times \int \frac{\Delta\,A^0 . \Delta\,B^0}{r^0\,A\,B^0}$ ohne Bedenken weglassen und den vollständigen Werth des in augenblicklichen Termi-

nen bey der Auflösung aller Paare zu zahlenden Thalers $= \frac{\pi}{p'} \vartheta \overline{a\,b}$ setzen.

§. 189.

Wenn die Summe 1 bezahlt werden soll am Ende des Jahrs, worin B stirbt, unter der Bedingung, daſs dann, d. i. am Ende des Jahrs, A noch lebe, so hat man den Werth derselben $= \frac{A^1 \triangle B}{A\,B\,r}$ $+ \frac{A^2 \triangle B^1}{A\,B\,r^2} + \frac{A^3 \triangle B^2}{A\,B\,r^3} + \ldots =$ $\frac{A^1 (B - B^1)}{A\,B\,r} + \frac{A^2 (B^1 - B^2)}{A\,B\,r^2} + \frac{A^3 (B^2 - B^3)}{A\,B\,r^3}$ $+ \ldots = \frac{B^{\overline{-1}}}{B} \lambda \overline{a\,(b - 1)} - \lambda \overline{a\,b}.$

Sollte aber diese Summe bezahlt werden zwar wieder am Ende des Jahrs, worin B stirbt, jedoch überhaupt auf den Fall, daſs A in dem Augenblick, wo B stirbt, noch lebt, wenn er auch nachher in demselben Jahre gleichfalls abgehen sollte, so ist nach §. 131 die vollständige Anzahl aller überlebenden A im ersten Jahre $= A^1 \triangle B + \frac{1}{2} \triangle A \,.\, \triangle B$, im zweiten Jahre $= A^2 \triangle B^1 + \frac{1}{2} \triangle A^1 \,.\, \triangle B^1$ etc., und es ist daher zu dem vorher angegebenen Werthe noch hinzuzulegen $\frac{1}{2\,A\,B} \left(\frac{\triangle A \,.\, \triangle B}{r} + \frac{\triangle A^1 \,.\, \triangle B^1}{r^2} + \ldots \right)$ Nun ist $\frac{1}{2\,A\,B} \left(\frac{\triangle A \,.\, \triangle B}{r} \right.$

$$+ \frac{\Delta A^1 . \Delta B^1}{r^2} + .. \Big) = \frac{1}{2\,A\,B}\Big(\frac{(A - A^1)(B - B^1)}{r}$$

$$+ \frac{(A^1 - A^2)\,(B^1 - B^2)}{r^2} + .. \Big) =$$

$$\frac{1}{2\,A\,B}\Big(\frac{A^0\,B^0}{r} + \frac{A^1\,B^1}{r^2} + .. \Big) -$$

$$\frac{1}{2\,A\,B}\Big(\frac{A^0\,B^1}{r} + \frac{A^1\,B^2}{r^2} + .. \Big) -$$

$$\frac{1}{2\,A\,B}\Big(\frac{A^1\,B^0}{r} + \frac{A^2 . B^1}{r^2} + .. \Big) +$$

$$\frac{1}{2\,A\,B}\Big(\frac{A^1\,B^1}{r} + \frac{A^2\,B^2}{r^2} + .. \Big) =$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} + \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{r} - \frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} -$$

$$- \frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} + \lambda\,\overline{a\,b}\Big).$$ Danach wird

also der gesuchte vollständige Werth $=$

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} - \lambda\,\overline{a\,b} + \frac{1}{2\,r} +$$

$$\frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{2\,r} - \frac{A^{\overline{-1}}}{2\,A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} -$$

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{2\,B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} + \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{2} =$$

$$\frac{B^{\overline{-1}}}{2\,B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} - \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{2} + \frac{1}{2\,r}$$

$$+\frac{\lambda\,\overline{ab}}{2r} - \frac{\overset{-1}{A}}{2A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda\,\overline{ab}}{pr}\right) + \frac{\overset{-1}{B}}{2B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)}$$

$$-\frac{\overset{-1}{A}}{2A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b} = \frac{1}{2}\Big(\vartheta\,\overline{ab} +$$

$$\frac{\overset{-1}{B}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} - \frac{\overset{-1}{A}}{A} \times$$

$$\lambda\,\overline{(a-1)\,b}\Big).$$

Auf die nämliche Weise findet man den Werth der Summe 1, die am Ende des Jahrs bezahlt werden soll, worin A stirbt, wenn B bey dessen Tode noch lebte, $= \frac{1}{2}\Big(\vartheta\,\overline{ab} + \frac{\overset{-1}{A}}{A} \times$

$$\lambda\,\overline{(a-1)\,b} - \frac{\overset{-1}{B}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)}\Big).$$

Nimmt man beide Werthe, nämlich den der Summe, die bezahlt werden soll, wenn A zuerst stirbt, und der Summe, die fällig ist, wenn B zuerst stirbt, zusammen, so erhält man wieder ihre Summe $= \vartheta\,\overline{ab}$, wie es seyn muſs.

Ex. Es sey $a = 30$, $b = 60$, so ist nach der Süſsmilchschen Sterblichkeitstafel und dem Zinsfuſse von 4 Procent $\vartheta\,(30.60) = 0{,}6769$, $\lambda\,(29.60) = 7{,}4282$, $\lambda\,(30.59) = 7{,}5975$. Folglich wird der

Werth der Anwartschaft für das Ueberleben von A $=$ $\frac{1}{2}(0,6769 + \frac{219}{210} 7,5975 - \frac{445}{439} 7,4282)$, und für das Ueberleben von B $= \frac{1}{2} (0,6769 + \frac{445}{439} \times 7,4282 - \frac{219}{210} 7,5975)$. Das Erstere giebt 0,53515, das Letztere aber 0,14175, und Beides zusammen genommen ist wieder $= 0,6769$.

Sollten die hier angegebenen Anwartschaften durchgängig in der Mitte oder im Anfange des Jahrs als fällig angesehen werden, so müſste man die angeführten Werthe im ersteren Falle mit $r^{\frac{1}{2}}$, im letzteren aber mit r multipliciren. Wenn aber die Anwartschaft jedesmal im Laufe des Jahrs, worin die Auflösung geschieht, bezahlt werden sollte, so wären die angegebenen Werthe mit $\frac{\pi}{p}$ zu multipliciren.

Anm. Die hiezu noch gehörige Correction kann man nach dem, was im §. 188 angeführt worden, wohl als unbedeutend weglassen.

§. 190.

Wenn die Anwartschaft bezahlt werden sollte bey dem Tode von A, falls *derselbe zuletzt stirbt*, so ist der Werth derselben $= \frac{1}{AB} (\frac{\Delta A (B - B)}{r}$

$$+ \frac{\Delta A^{1} (B - B^{1})}{r^{2}} + \frac{\Delta A^{2} (B - B^{2})}{r^{3}}$$

$$+ \ldots) + \frac{1}{2\,AB} \left(\frac{\Delta A . \Delta B}{r} + \frac{\Delta A^{1} . \Delta B^{1}}{r^{2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta A^{2} . \Delta B^{2}}{r^{3}} + \ldots \right).$$ Der erste Theil ist, $=$

$$\frac{\overline{A^{-1}}}{A} \lambda \overline{a - 1} - \frac{\overline{A^{-1}}\,\overline{B^{-1}}}{A\,B} \times$$

$$\lambda\, \overline{(a - 1)(b - 1)} - \lambda a + \frac{\overline{B^{-1}}}{B} \times$$

$$\lambda\, \overline{a\,(b - 1)} = \frac{1 + \lambda a}{r} - \frac{1 + \lambda (ab)}{r}$$

$$- \lambda a + \frac{\overline{B^{-1}}}{B} \lambda\, \overline{a\,(b - 1)} = \frac{1}{r}$$

$$- \frac{\lambda a}{pr} - \frac{1 + \lambda (ab)}{r} + \frac{\overline{B^{-r}}}{B} \times$$

$\lambda\, \overline{a\,(b - 1)}$, und dies ist zugleich der Werth, wenn auf diejenigen A nicht gerechnet werden soll, die zwar nach ihren B, aber in demselben Jahre mit ihnen, sterben.

Der zweite Theil ist nach dem vorhergehenden §. $= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \lambda (a\,b)}{r} - \frac{\overline{B^{-1}}}{B} \lambda\, \overline{a\,(b - 1)} - \right.$

$$\left. \frac{\overline{A^{-1}}}{A} \lambda\, \overline{(a - 1)\,b} + \lambda\, \overline{a\,b} \right].$$ Beide

Theile zusammengenommen geben also den vollständigen Werth $= \frac{1}{r} - \frac{\lambda a}{pr} - \frac{1 + \lambda \overline{ab}}{2r} + \frac{\lambda \overline{ab}}{2} + \frac{B^{-1}}{2B} \lambda \overline{a(b-1)} - \frac{A^{-1}}{2A} \lambda \overline{(a-1)b} = \vartheta a - \frac{1}{2} \vartheta \overline{ab} + \frac{1}{2}\left[\frac{B^{-1}}{B} \lambda \overline{a(b-1)} - \frac{A^{-1}}{A} \times \lambda \overline{(a-1)b}\right]$.

Sollte auf dieselbe Weise für B, wenn er zuletzt stürbe, die Anwartschaft bezahlt werden, so wäre der Werth derselben $= \vartheta b - \frac{1}{2} \vartheta \overline{ab} + \frac{1}{2}\left[\frac{A^{-1}}{A} \lambda \overline{(a-1)b} - \frac{B^{-1}}{B} \times \lambda \overline{a(b-1)}\right]$.

Wenn diese Anwartschaften in jedem Jahre sofort, so wie das Absterben erfolgt, fällig werden sollten, so könnte man die eben gefundenen Werthe noch mit $\frac{\pi}{p}$ multipliciren.

Anm. Man kann den vollständigen Werth der Anwartschaft, die bey dem Tode von A, wenn derselbe zuletzt stirbt, bezahlt werden soll, auch ausdrucken durch

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\Delta A\,(B - B^1)}{r} + \frac{\Delta A^1\,(B - B^2)}{r^2} + \dots\right) - \frac{1}{2\,AB}\left(\frac{\Delta A\;\Delta B}{r} + \frac{\Delta A^1\;\Delta B^1}{r^2} + \dots\right)$$

Der erste Theil für sich wäre gleich $\vartheta a - \frac{A^{\overline{-1}}}{A} \times \lambda\overline{(a-1)\,b} + \lambda\,\overline{a\,b}$, und wenn man den zweiten Theil abzöge, so hätte man wieder, $\vartheta a - \frac{1}{2}\,\vartheta\,\overline{a\,b} + \frac{1}{2}\left(\frac{B^{\overline{-1}}}{B}\,\lambda\,\overline{a\,(b-1)} - \frac{A^{\overline{-1}}}{A}\,\lambda\,\overline{(a-1)\,b}\right)$. Der erste Theil für sich wäre zu groſs, so wie der oben im Texte angegebene erste Theil für sich zu klein ist.

§. 191.

Im Fall die Anwartschaft sowohl bey dem Tode von A, wenn er zuletzt stirbt, als bey dem Tode von B, wenn derselbe zuletzt abgeht, bezahlt werden sollte, so müſste man die im vorigen §. gefundenen beiden Werthe zusammennehmen, und man erhielte dann das Gesuchte $= \vartheta a + \vartheta b - \vartheta\,\overline{a\,b}$, welcher Ausdruck dem vorhin gegebenen Ausdruck für die Rente des Längstlebenden, nämlich $\lambda a + \lambda b - \lambda\,\overline{a\,b}$, entspricht.

§. 192.

Wenn eine der vorher angegebenen Zahlungen um n Jahre *aufgeschoben* werden sollte, und zwar ohne weitere Bedingung, so müſste man, um den Werth zu finden, für jeden einzelnen Theil, woraus der dafür angeführte Ausdruck besteht, den um n

Jahre aufgeschobenen Werth suchen. Wenn als z. B. vom Ablauf des nten Jahrs an bey dem Tod von A, im Fall derselbe vor B abgeht, die Summ 1 bezahlt werden sollte, so wäre ihr jetziger Werth

$$= \frac{\overset{n}{A}\;\overset{n}{B}}{2\,A\,B\,r^n}\,[\,\vartheta\,\overline{(a+n)}\,\overline{(b+n)}\,+$$

$$\frac{\overset{n-1}{A}}{\overset{n}{A}}\,\lambda\,\overline{(a+n-1)}\,\overline{(b+n)}\,-$$

$$\frac{\overset{n-1}{B}}{\overset{n}{B}}\,\lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n-1)}\,]$$ (§. 189).

Sollte die Summe bezahlt werden, wenn vom Ablauf des nten Jahrs an A zuletzt stürbe, so hätte man den jetzigen Werth $= \frac{\overset{n}{A}}{A\,r^n}\,\vartheta\,\overline{a+n}$

$$-\,\frac{\overset{n}{A}\;\overset{n}{B}}{2\,A\,B\,r^n}\,[\,\vartheta\,\overline{(a+n)}\,\overline{(b+n)}\,-$$

$$\frac{\overset{n-1}{B}}{\overset{n}{B}}\,\lambda\,\overline{(a+n)}\,\overline{(b+n-1)}\,+$$

$$\frac{\overset{n-1}{A}}{\overset{n}{A}}\,\lambda\,\overline{(a+n-1)\,(b+n)}\,]$$ (§. 190).

Wenn die Zahlung nur für die ersten Jahre gelten sollte, so müſste man von dem Werthe der vollen Zahlung den Werth der um n Jahre aufgeschobenen Zahlung abziehen.

Sollte dagegen vom Ablauf des nten Jahrs an die Zahlung nur dann festgesetztermaſsen geleistet werden, *wenn am Ende des nten Jahrs A und B noch zusammen lebten*, so müſste man den Werth der Zahlung für Personen vom Alter $a + n$ und $b + n$ suchen, denselben auf n Jahre discontiren und mit der Wahrscheinlichkeit, daſs A und B am Ende des nten Jahrs beide leben, multipliciren, d. h. wenn der Werth für die Personen vom Alter $a + n$ und $b + n = V^{\overline{n}}$ ist, so wäre der gesuchte Werth $= \frac{A^{\overline{n}} \cdot B^{\overline{n}}}{AB\ rn} V^{\overline{n}}$.

§. 193.

Soll der Werth einer Anwartschaft, so wie solcher bisher bestimmt worden, nicht auf einmal, sondern durch einen unveränderlichen jährlichen Beitrag, entweder auf die Lebenszeit einer einzigen Person oder die Verbindungsdauer beider Personen, bezahlt werden, so hat man diesen jährlichen Beitrag als eine Leibrente oder Verbindungsrente anzusehen und man muſs dann, wie bereits in den §. §. 113 und 175 gezeigt worden, den baaren Werth der Anwartschaft durch den Werth der jährlich mit 1 zu zahlenden Leib- oder Verbindungsrente dividiren, um den jährlichen Beitrag zu finden.

Z. B. nach §. 189 ist der Werth der Anwartschaft, die bey dem Tode von B bezahlt werden

soll, im Fall A dann noch lebt, wenn b = 60 und a = 30 gesetzt wird, = 0,53515. Sollte also A bey dem Tode von B eine Summe = 1000 bekommen und wollte das Paar während seiner Verbindungsdauer durch jährliche Beiträge den Werth bezahlen, so wäre der Beitrag dafür nach Süſsmilchs Sterbensordnung und zu 4 Procent =

$$\frac{0{,}53515}{\lambda\,\overline{ab}} \cdot 1000 = \frac{535{,}15}{7{,}3987} = 72{,}03.$$

§. 194.

Eine geschloſsene Anzahl A von Personen des Alters a trete zusammen unter der Bestimmung, daſs bey dem Tode einer jeden unter ihnen von jedem dann noch lebenden Intereſsenten 1 Rthlr. bezahlt werden solle; wie groſs ist der Werth der Anwartschaft für jeden Intereſsenten? Wenn man zuerst auf ganze Jahre rechnet, so ist die Zahlung des ersten Jahrs, da ΔA sterben und A^1 noch leben, = $\Delta A \,.\, A^1$, die des zweiten Jahrs = $\Delta A^1 \,.\, A^2$, die des dritten Jahrs = $\Delta A^2 \,.\, A^3$ etc. Alles auf den Anfangstermin discontirt und über sämtliche Intereſsenten vertheilt, wird der Werth =

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A \,.\, A^1}{r} + \frac{\Delta A^1 \,.\, A^2}{r^2} + \frac{\Delta A^2 \,.\, A^3}{r^3} + \ldots\right)$$

Nun ist der letztere Ausdruck

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{(A - A^1)\, A^1}{r} + \frac{(A^1 - A^2)\, A^2}{r^2}\right.$$

$$+ \frac{(A^{\underline{2}} - A^{\underline{3}})\, A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots) = \frac{1}{A} \left(\frac{A^{\underline{0}}\, A^{\underline{1}}}{r} \right.$$

$$+ \frac{A^{\underline{1}}\, A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{2}}\, A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots) -$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{A^{\underline{1}}\, A^{\underline{1}}}{r} + \frac{A^{\underline{2}}\, A^{\underline{2}}}{r^2} + \frac{A^{\underline{3}}\, A^{\underline{3}}}{r^3} + \ldots \right) =$$

$$A^{\overline{-1}} \,.\, \lambda\, \overline{(a - 1)\, a} - A \,.\, \lambda\, \overline{a\, a}.$$

Ist die Anzahl der anfänglichen Intereſsenten $= N$, so muſs man diesen gefundenen Ausdruck mit $\frac{N}{A}$ multipliciren, und man erhält alsdann den Werth

$$= \frac{A^{\overline{-1}}}{A} N\, \lambda\, \overline{(a - 1)\, a} - N \,.\, \lambda\, \overline{a\, a}.$$

Ex. Es sey $N = 374$, $a = 40$, also $\lambda\, \overline{a\, a} = \lambda\, \overline{40 \,.\, 40}$. und $\lambda\, \overline{(a - 1)\, a} = \lambda\, \overline{39 \,.\, 40}$, so hat man nach Süſsmilchs Tabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent den Werth $= 381 \,.\, 10{,}0322 - 374 \,.\, 9{,}9484 = 3822{,}2682 - 3720{,}7016 = 101{,}5666$.

Es ist jedoch leicht vorher zu sehen, daſs, wenn die Zahlung *im Laufe des Jahrs*, und zwar von allen denen, die *dann* noch leben, geschehen soll, der Unterschied des Werths gegen den zuletzt gefundenen nicht unbeträchtlich seyn könne. Da nämlich in dem angeführten Beispiele $A = 374$, $A^{\underline{1}} = 367$ und $\Delta A = 7$ ist, so sind für das erste Jahr nur 367 . 7 Rthlr. in Rechnung gebracht, wogegen, wenn bey dem ersten Todesfalle 373, bey dem 2ten 372 etc. gezahlt werden, allein für das erste Jahr, ohne Rücksicht auf die Zinsen, von allen

Interefsenten zusammengenommen 21 Rthlr. mehr zu zahlen sind. Soll nun bey jedem Sterbefalle sofort im Laufe des Jahrs von allen noch lebenden Mitgliedern bezahlt werden, so ist der baare Werth der Zahlungen des ersten Jahrs, über alle anfänglich vorhandene Interefsenten vertheilt, =

$$\frac{\Delta A}{A} \int [A^1 + (1 - x) \Delta A] \frac{dx}{r^x} =$$

$$\frac{A^1 . \Delta A}{A} \int \frac{dx}{r^x} + \frac{\Delta A . \Delta A}{A} \int \frac{(1 - x) dx}{r^x}.$$

Wenn man integrirt und darauf $x = 1$ setzt, so wird der obige Ausdruck $= \frac{\pi}{pr} \frac{A^1 \Delta A}{A} +$ $(\pi - \frac{\pi^2}{pr}) \frac{\Delta A . \Delta A}{A}$ (§. 42. und 44. b).
Auf die nämliche Weise erhält man den gegenwärtigen Werth der Zahlungen des zweiten Jahrs =
$\frac{\pi}{pr} \frac{A^2 \Delta A^1}{A r} + (\pi - \frac{\pi^2}{pr}) \frac{\Delta A^1 . \Delta A^1}{A r}$
etc.; folglich wird der Werth für alle Jahre =

$$\frac{\pi}{pr} \left(\frac{A^1 \Delta A}{A} + \frac{A^2 \Delta A^1}{A r} + . . \right)$$

$$+ (\pi - \frac{\pi^2}{pr}) \left(\frac{\Delta A . \Delta A}{A} + \frac{\Delta A^1 . \Delta A^1}{A r} \right.$$

$\left. + . . \right)$. Setzt man aber $A - A^1$ anstatt ΔA, ferner $A^1 - A^2$ anstatt ΔA^1 etc., so erhält man den

gesuchten Werth $= \frac{\pi}{pr} \frac{A^{\overline{-1}}}{A^{\overline{-1}} A}$ $(A A^1 +$

$$\frac{A^{\underline{1}}\,A^{\underline{2}}}{r} + \ldots) - \frac{\pi}{pr}\,\frac{A}{AA}\,(A^{\underline{1}}\,A^{\underline{1}} +$$

$$\frac{A^{\underline{2}}\,A^{\underline{2}}}{r} + \ldots) + (\pi - \frac{\pi^2}{pr})\,[\frac{A}{A\,A} \times$$

$$(A\,A + \frac{A^{\underline{1}}\,A^{\underline{1}}}{r} + \ldots) - \frac{2\,A^{\overline{-1}}}{A^{\overline{-1}}\,A} \times$$

$$(A\,A^{\underline{1}} + \frac{A^{\underline{1}}\,A^{\underline{2}}}{r} + \ldots) + \frac{A}{A\,A}(A^{\underline{1}}\,A^{\underline{1}} +$$

$$\frac{A^{\underline{2}}\,A^{\underline{2}}}{r} + \ldots) = \frac{\pi}{p}\,(A^{\overline{-1}}\,.\,\lambda\,\overline{(a-1)\,a} -$$

$$A\,.\,\lambda\,\overline{a\,a}) + (\pi - \frac{\pi^2}{p\,r})\,[A + (1 + r)\,A\,.\,\lambda\,\overline{a\,a} -$$

$$2\,r\,A^{\overline{-1}}\,.\,\lambda\,\overline{(a-1)\,a}\,].$$

Wendet man dieses auf das vorher angeführte Beispiel an und behält dabey $r = 1{,}04$, wo $\frac{\pi}{p} = 1{,}019869$ und $\pi - \frac{\pi^2}{pr} = 0{,}493527$ ist, so erhält man den Werth $= 1{,}019869 \cdot 101{,}5666 + 0{,}493527\,(374 + 2{,}04 \cdot 374 \cdot 9{,}9484 - 2{,}08 \cdot 381 \times 10{,}0322) = 103{,}584 + 6{,}867$, wo der erste Theil bloſs der im vorhergehenden §. angegebene Werth mit den augenblicklichen Zinsen, der zweite Theil aber dasjenige mit Zinsen ist, was für die Abgehenden an Anwartschaft mehr als vorher bezahlt werden muſs.

§. 195.

Der Werth einer Anwartschaft, so wie sie im

vorigen §. angegeben worden, nach *der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens* wäre sehr leicht zu finden. Wenn nämlich der Werth für das Alter a und zwar zuerst auf ganze Jahre gesucht wird, und die Altersergänzung, auch zugleich die Anfangszahl der Intereſsenten $= \alpha$ ist, so ist, da in jedem Jahre 1 Intereſsent abgeht, der gegenwärtige Werth einer solchen Anwartschaft $= \frac{1}{\alpha} (\frac{\alpha - 1}{r} + \frac{\alpha - 2}{r^2} + \dots \frac{1}{r^{\alpha - 1}})$. Dies ist aber $= \lambda a$, d. h. dem Werth der Leibrente für das Alter a nach der Hypothese des gleichmäſsigen Absterbens gleich. Es ergiebt sich dies auch schon daraus, daſs es einerley Werth geben muſs, ob die am Ende jedes Jahrs noch lebenden Intereſsenten jedes Jahrs jeder 1 Rth. empfangen, oder für den einen Abgehenden 1 Rth. bezahlen.

Ex. Für das Alter von 40 Jahren ist nach der aus der Süſsmilchschen Tabelle genommenen Altersergänzung und dem Zinsfuſse zu 4 Procent $\lambda a = 13{,}0760$, folglich wird der Werth der Anwartschaft, wenn die Anfangszahl der Intereſsenten $= 45{,}28$ ist, $= 13{,}0760$. Wollte man dies auf die im §. 194 angenommene Anzahl reduciren, so erhielte man den Werth $= \frac{374}{45{,}28}\, 13{,}0760 = 108{,}005$.

Soll der Abgang der Intereſsenten in Terminen und zwar augenblicklich geschehen, so ist, wenn die verfloſsene Zeit $= x$ gesetzt wird, das Decre-

ment des Augenblicks $= dx$, die Anzahl der Interefsenten, welche jeden Augenblick 1 Rthlr. an dx zahlen, $= \alpha - x$, folglich der discontirte Werth der augenblicklichen Zahlung $= \frac{(\alpha - x)\, dx}{r^x}$, und der baare Werth der gesammten Zahlungen, auf alle Interefsenten vertheilt, $= \int \frac{(\alpha - x)}{\alpha} \frac{dx}{r^x}$, welches wieder gleich dem Werthe der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Leibrente nach der Hypothese des gleichmäfsigen Absterbens ist.

Ex. Da die in augenblicklichen Terminen nach der Hypothese zahlbare Leibrente für das Alter von 40 Jahren $= 13{,}5702$ ist, so ist dies zugleich der Werth der Anwartschaft, wenn wieder α die Anfangszahl ist. Reducirt man den Werth auf die Anfangszahl 374, so hat man $\frac{374}{45{,}28} \cdot 13{,}5702 = 112{,}086$.

Anm. Die beiden letzten §. §. zeigen im Allgemeinen, wie man zu rechnen haben würde, wenn eine Gesellschaft, worin die bey jedem Todesfall zu zahlende Summe durch die Beiträge der Interefsenten aufgebracht wird, aufgehoben und das Interefse der Mitglieder ausgemittelt werden sollte. Wenn indefsen das Alter der Mitglieder verschieden wäre, so wäre auch ihr Interefse verschieden, indem die älteren Glieder der Wahrscheinlichkeit nach mehr empfangen als zahlen, und die Berechnung würde dann noch weitläufiger ausfallen.

§. 196.

Es sollen mehrere Paare, bestehend aus einer

Person vom Alter a und einer andern vom Alter b, in eine fortwährende Gesellschaft zusammengetreten seyn mit der Verpflichtung, daſs so oft irgend eine Person aus der Gesellschaft stirbt, am Ende des Jahrs, worin der Todesfall erfolgt, 1 Rth. bezahlt und diese Zahlung gleichmäſsig von allen bestehenden Paaren, oder, falls eine Person davon schon gestorben seyn sollte, von dem überlebenden Theilnehmer aufgebracht werde; anstatt jedes ausgestorbenen Paars soll ein neues, ebenfalls vom Alter a und b, wieder eintreten und die Gesellschaft soll bereits in den Beharrungszustand gekommen seyn: man sucht den Werth der Zahlung jedes Paars. Der Beharrungszustand tritt erst dann ein, wenn die gröſste Altersergänzung, die zu A gehören und $= x$ seyn mag, abgelaufen ist. Dann ist, wenn die Zahl der jedes Jahr eintretenden Paare $= AB$ genommen wird, fortwährend die Anzahl der Personen A in der Gesellschaft, die Correction ungerechnet, $=$

$$B\,(A^{\underline{1}} + A^{\underline{2}} + A^{\underline{3}} + \ldots + A^{\underline{x}}) = B \int A'^{\underline{1}},$$

die Zahl der Personen B in der Gesellschaft aber

$$= A\,(B^{\underline{1}} + B^{\underline{2}} + B^{\underline{3}} + \ldots + B^{\underline{y}}) = A \int B'^{\underline{1}},$$

und die Anzahl aller Personen in der Gesellschaft ist $= B \int A'^{\underline{1}} + A \int B'^{\underline{1}}$. Von den Personen A

gehen jährlich ab $B\,(\Delta A + \Delta A^{\underline{1}} + \ldots + \Delta A^{\underline{x}})$ $= BA$, und von den Personen B sterben jährlich

$A\,(\Delta B + \Delta B^{\underline{1}} + \ldots + \Delta B^{\underline{y}}) = AB$. Also ist das Maaſs der jährlichen Sterblichkeit in der Ge-

sellschaft $= \frac{2AB}{B \int A'^1 + A \int B'^1} =$

$\frac{2AB}{ABEa + ABEb} = \frac{2}{Ea + Eb}$. Besteht also die Gesellschaft beharrlich aus n Personen, so ist die jährliche Anzahl der Todesfälle $= \frac{2n}{Ea + Eb}$, und, da jedes Paar, so lange eine Person davon lebt, d. i. auf das längste Leben unter ihnen, bey jedem Todesfall $\frac{1}{n}$ Rthlr., also jährlich $\frac{2}{Ea + Eb}$ Rth. zahlen soll, so ist der gegenwärtige Werth davon $=$

$\frac{2}{Ea + Eb} (\lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab})$.

Ex. Es sey a = 40 und b = 50, so ist nach Süſsmilchs Mortalitätstabelle und dem Zinsfuſse von 4 Procent $\frac{2}{Ea + Eb} (\lambda a + \lambda b - \lambda \overline{ab}) =$

$\frac{2}{22,64 + 16,95} \cdot (13,1565 + 10,7961 - 8,6531) = 0,7729$.

Anm. Uebrigens gilt von Kaſsen dieser Art, die hin und wieder vorkommen, dasjenige, was vorher §. 116 von ähnlichen Todtenkaſsen für einzelne Intereſsenten angeführt worden.

Verbesserungen.

Seite 9 Zeile 4 und 5 anstatt *Zinsfuss*, lies *Exponenten*.
— 9 — 10 anst. Ct^n l. Cr^n.
— 15 — 3 im Nenner des letzten Bruchs anst. $2n$ l. 2.
— 15 — 1 v. u. und Seite 16 Zeile 1 v. o. im Nenner des Bruchs anst. $2n$ l. 2.

Seite 30 Zeile 8 anst. $r^{n-} \int r^m$ l. $r^{n-1} \int r^m$.
— 36 — 5 anst. *nur* l. *nun*.
— 50 letzte Zeile anst. $r - r$ l. $r - 1$.
— 63 — 14 v. o. anst. $(3 + r)^m$ l. $(3 + 1)^m$.
— 64 — 4 v. u. anst. $r\,n - 1$ l. r^{n-1}.
— 67 — 5 v. u. anst. $\frac{r}{1}$ l. $\frac{1}{r}$.
— 75 — 2 v. u. anst. *in* l. *m*.
— 76 — 12 v. o. anst. *mten* l. *nten*.
— 78 — 5 v. u. anst. r^n im Nenner l. r^x.
— 87 — 10 anst. *giesst* l. *giebt*.
— 88 — 4 v. u. anst. r^n im Nenner l. r^x.
— 110 — 3 v. o. anst. $\int \Delta A^{\overline{'n}}$ l. $\Delta A^{\overline{n}}$.
— 123 — 2 v. u. anst. $\frac{\Delta A^1 - \Delta^2 A^0}{r}$ lies $\frac{\Delta A^0 - \Delta^2 A^0}{r}$.

Seite 146 Zeile 12 v. o. nach ϑa setze $=$.
— 151 — 11 anst. B^1 l. $B^{\overline{-1}}$.
— 187 — 7 v. u. anst. *ältern* l. *jüngern*.
— 197 — 2 v. u. anst. $\frac{\Delta^2 A^1}{r^0}$ l. $\frac{\Delta^2 A^0}{r^0}$.

Seite 299, Columne 5 Zeile 4 anst. 180 l. 108.
Ebendas. Zeile 8 v. u. anst. 11 im Nenner l. 18.

Seite 223 Zeile 12 v. o. anst. $B^{\overline{'-1}}$ l. B'^1

Seite 223 Zeile 5 v. u. anst. B^{-2} l. B^{2}.

— 224 — 5 v. o. anst. $B^{\underline{-1}}$ l. B^{2}

— 231 — 7 v. u. anst. $E(30 . 37)$ l. $E(20 . 37)$.

— 232 — 10 v. o. anst. A^{2} l. ΔA^{2}.

— 234 — 12 anst. 1,45 l. 14,5.

— 241 — 5 v. u. anst. $B^{\underline{-1}}$ l. B^{1}.

— 242 — 8 v. o. anst. $A^{\underline{-2}}$ l. A^{2}.

— 245 — 10 anst. $n - n$ im Zähler l. $n - 1$.

— 146 — 1 anst. 2 hinter dem Gleichheitszeichen l. $\frac{1}{2}$.

— 247 — 2 anst. $\frac{300}{306}$ l. $\frac{308}{306}$.

— 251 — 2 v. u. anst. $B^{\underline{-2}}$ l. B^{2}.

— 256 — 9 l. $\int(\Delta A^{\underline{n-1}} \int \Delta B^{\underline{n-1}})$,

— 256 — 13 l. $\int(\Delta A^{\underline{n-1}} . \Delta B^{\underline{n-1}})$.

— 274 — 1 anst. B'^{-2} l. B'^{2}.

— 278 — 17 im Nenner anst. r^{2} l. r^{3}.

— 296 in der ersten Columne Zeile 27 anst. 50.90 l. 55.90; und Zeile 29 anst. 65.75 l. 60. 75.

Seite 330 Zeile 9 v. u. anst. B^{1} l. B'^{1}.

An einigen Stellen, z. B. S. 63, S. 72 etc., wo zwey oder mehrere zusammengehörige Zeilen abgebrochen werden mufsten, sind die Fortsetzungszeichen = vergessen.

gehört zur Seite 256.

Jahre	$\Delta A^{1} \cdot \int \Delta B^{n-1}$	$\overline{\int \Delta A^{n-1} \int \Delta B^{n-1}}$.
1	15	15
2	25	40
3	35	75
4	45	120
5	55	175
6	60	235
7	65	300
8	70	370
9	90	460
10	96	556
11	102	658